



## О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РАСЧЕТА ОПЕРАТОРА СЕЙСМИЧЕСКОЙ МИГРАЦИИ ПО МЕТОДУ С.В. ГОЛЬДИНА

**М.С. Денисов**

*ООО “ГЕОЛАБ”, 119071, Москва, ул. Орджоникидзе, 12/4, Россия, e-mail: denisovms@gmail.com*

Оператор миграции в лучевом приближении был получен С.В. Гольдиным на основании формулы, связывающей производные поля времен с геометрическим расхождением. Вывод этого выражения, имеющего принципиальное значение также и в динамической теории распространения упругих волн, и, кроме того, лежащего в основе многих алгоритмов решения обратной кинематической задачи сейсморазведки, оказывается громоздким, перегруженным математическими деталями и не имеющим наглядного геофизического толкования. В работе предложен способ получения искомого выражения, привлекающий минимум математических подробностей и оперирующий простыми и известными геофизическими понятиями. Также получен фактор, уточняющий интересующую нас формулу и обобщающий ее на более широкий класс моделей среды.

*Геометрическое расхождение, поле времен, коэффициент отражения, миграция по Кирхгофу*

### SOME ASPECTS OF CALCULATION OF THE SEISMIC MIGRATION OPERATOR WITH THE METHOD OF S.V. GOLDIN

**M.S. Denisov**

*GEOLAB Ltd, Ordzhonikidze str., 12/4, Moscow, 119071, Russia, e-mail: denisovms@gmail.com*

Seismic ray-theoretical migration operator was derived by S.V. Goldin based on the expression that relates the traveltimes derivatives with the geometrical spreading factor. The derivation of this basic formula, which is essential also in the dynamic theory of elastic wave propagation, and, in addition, underlies many algorithms for kinematical inversion is complicated, overloaded with mathematical details and suffers from lack of geophysical interpretation. The paper proposes a method to obtain the desired expression, attracting minimum of mathematical details and operating with simple and well-known geophysical concepts. Also, a factor is obtained that generalizes the result to a wider class of models of the medium.

*Geometrical spreading, traveltimes, reflection coefficient, Kirchhoff migration*

### ВВЕДЕНИЕ

Сейсмическая миграция является инструментом построения глубинного изображения фрагмента земной коры, изучаемого сейсморазведкой. Алгоритм миграционного преобразования сейсмических данных был получен советским геофизиком Ю.В. Тимошиным [1972]. Им было предложено теоретическое обоснование процедуры так называемого Д-преобразования, а также продумана и тщательно разработана технология обработки временных разрезов общей средней точки (ОСТ). Независимо от этих исследований на Западе к аналогичным результатам пришел В.А. Шнайдер [Schneider, 1978]. В англоязычной литературе процедура получила название миграции по Кирхгофу. Затем этот термин был заимствован отечественными исследователями.

Логика рассуждений Ю.В. Тимошина была проста и наглядна: Д-преобразование интерпретировалось как обнаружение в сейсмическом волновом поле “элементарных дифрагированных волн”. Упругая волна, распространяющаяся в среде, взаимодействует с неоднородностями. Согласно принципу Гюйгенса (здесь уместно упомянуть работы, в которых приведены комментарии, касающиеся использования принципа Гюйгенса в сейсморазведке [Денисов, 2008; Петрашень, Ру-

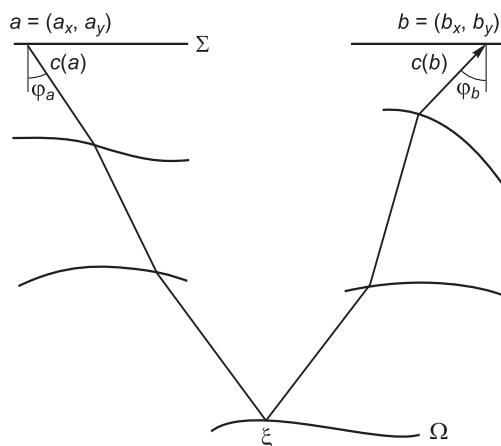
даков, 2008]), каждый элемент среды порождает вторичную дифракционную волну. Тогда, суммируя поле, зарегистрированное на поверхности, вдоль годографов дифрагированных волн, выделим соответствующие глубинные неоднородности. Такая интерпретация алгоритма вошла даже в учебник по сейсморазведке [Бога-ник, Гурвич, 2006]. Однако она не выдержала проверку динамической теорией распространения волн. Более того, и сам Ю.В. Тимошин вскоре от нее отказался, перейдя к интерпретации своего алгоритма как к “Импульсной сейсмической голографии” [Тимошин, 1978].

В то же время некорректное теоретическое обоснование ставит под сомнение и сам алгоритм Д-преобразования. С.В. Гольдин вспоминает, как на одном из научных семинаров Георгий Иванович Петрашень, подняв обе руки вверх, восклицал: “Это преобразование никак не должно работать, но почему-то оно работает!” [Гольдин, 2005, С. 4]. Г.И. Петрашень руководил лабораторией динамики упругих сред при Ленинградском государственном университете, среди сотрудников которой был С.А. Нахамкин. Совместно с Г.И. Петрашнем они начали разрабатывать оригинальный подход к анализу и обработке данных сейсморазведки, который базировался на прямых и обращенных про-

должения поля и был впоследствии изложен в книге [Петрашень, Нахамкин, 1973]. Полученные ими результаты легли в основу сейсмического миграционно-го преобразования.

Работы, проводимые под руководством Г.И. Петрашени, были настолько революционными для своего времени, что, по свидетельству С.В. Гольдина, который, конечно же, был в курсе всех новейших геофизических разработок в мире, информация о том, что группа Г.И. Петрашени занимается исследованием сейсмических волновых продолжений, его поразила. Эту новость сообщил ему С.А. Нахамкин. В статье “Судьба идеи” [Гольдин, 2005, С. 5] С.В. Гольдин пишет: “Он (Семен Нахамкин – *М.Д.*) сказал, что вместе с Петрашени исследует продолжение сейсмического волнового поля в нижнее полупространство. Если бы он сказал, что они высаживаются на Луну, это удивило бы меня меньше. Я знал, что в гравике занимаются продолжением поля вниз. Но мне и в голову не приходило, что что-то подобное возможно и в сеймике. ...Через несколько лет Семен подарил мне книжку, авторами которой были он и Г.И. Петрашень, а называлась она *Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки*”.

Таким образом, разработка алгоритма построения глубинного изображения в истинных амплитудах шла параллельно в двух геофизических группах, но “в ту пору ясности не было ни у кого” [Гольдин, 2005, С. 5]. Заслугой Сергея Васильевича Гольдина можно считать обобщение и истолкование результатов работ групп Тимошина и Петрашени, а также заложенный им прочный научный фундамент решения задачи построения изображений среды в лучевом приближении. В его работах, среди которых можно выделить хорошо известные статьи, опубликованные в журнале “Геология и геофизика” [Гольдин, 1987; 1992] и позже переизданные в сборнике трудов [Гольдин, 2011], мы находим тщательную теоретическую проработку задачи сейсмической миграции и способов построения соответствующих динамических операторов, а также реализации мигра-



**Рис. 1.** Условная схема проведения сейсмического эксперимента. Источник колебаний и приемники расположены на свободной поверхности  $\Sigma$  в точках  $a$  и  $b$  соответственно. Волна претерпевает отражение от глубинной границы  $\Omega$ . Траектория луча содержит точки  $a$  и  $b$ , а также точку отражения  $\xi$ . Через  $c(a)$  и  $c(b)$  соответственно обозначены скорости распространения волны в окрестности источника и приемника;  $\varphi_a$  – угол выхода луча из источника,  $\varphi_b$  – угол подхода луча к приемнику.

ционного преобразования с сохранением амплитуд. С тех пор в международном геофизическом сообществе лучевая миграция в истинных амплитудах неразрывно связана с именем С.В. Гольдина.

Ранние алгоритмы миграции применялись к разрезам ОСТ на завершающей стадии обработки. Современная динамическая миграция сейсмограмм стала центральной процедурой как по значимости, так и по положению в графе. Глубинная миграция до суммирования ближе к решению объемной обратной динамической задачи. Впрочем, как справедливо отмечает Е.А. Козлов [2006], миграция — особая задача, и она, в строгом смысле, не является обращением волнового поля. Приведем также мнение С.В. Гольдина [2005, С. 6]: “Миграция сильно напоминает решение обратной задачи. Но сейчас уже ясно, что это — специфический, но самостоятельный класс задач, возникший именно благодаря гиперболичности основных уравнений сеймики”.

Прийти к желаемому результату в виде лучевого оператора миграции, применение которого позволяет оценить коэффициент отражения глубинного горизонта, С.В. Гольдину позволило полученное ранее соотношение, связывающее геометрическое расхождение с производными поля времен. Им было выведено базовое выражение, на основании которого затем был построен алгоритм миграции. К сожалению, к этому выражению приходят путем труднодоступных выкладок. Здесь “труднодоступность” нужно понимать двояко. Во-первых, вывод соотношений отсутствует в доступной для большинства российских читателей литературе. Основные работы, в том числе англоязычные, посвященные динамическим методам миграции, содержат лишь ссылки на специальные и труднодоступные издания. Во-вторых, сам вывод соотношений в их общем виде оказывается весьма трудоемким и, как правило, тяжелым для восприятия и сопровождается многочисленными математическими выкладками и деталями.

Поэтому цель настоящей работы состоит в построении альтернативного вывода базового выражения, не требующего от читателя фундаментальной математической подготовки и реализованного в терминах, понятных и знакомых геофизику. В результате удается не только упростить рассуждения, сделав их нагляднее, но и ввести поправочный фактор, позволяющий обобщить выражение, полученное С.В. Гольдиным, на более широкий класс моделей.

## МОДЕЛЬ

Пусть на свободной поверхности задана прямоугольная система координат и пусть источник упругих волн расположен в точке, имеющей вектор-координату  $a = (a_x, a_y)$  (рис. 1).

Регистрация колебаний производится в точках с вектор-координатами  $b = (b_x, b_y)$ . Использование принципов лучевой теории [Алексеев, Гельчинский, 1959] позволяет рассматривать волновое поле как суперпозицию элементарных волн, каждая из которых имеет свою лучевую траекторию. Обозначим спектральную характеристику одной из таких волн через  $U(a, b, \omega)$ , где  $\omega$  – угловая частота. Эта волна распространяется в глубь среды и отражается от границы  $\Omega$ . В дальнейшем для краткости (там, где это не приведет к путанице) будем также называть  $U(a, b, \omega)$  не спектральной характеристикой, а волной. Отражение луча волны от глубинной границы происходит в точке  $\xi$ , и контраст-

ность границы в этой точке характеризуется коэффициентом отражения  $\mu = \mu(\xi)$ , который зависит также и от угла подхода луча.

Вводя обозначения:  $\tau(a, b)$  – время распространения волны вдоль траектории луча,  $S(\omega)$  – спектр импульса,  $k_{ab}$  – произведение коэффициентов прохождения границ, пройденных волной по пути из  $a$  в  $b$ ,  $L(a, b)$  – геометрическое расхождение, получим лучевое представление волны в виде

$$U(a, b, \omega) = \mu S(\omega) \frac{k_{ab}}{L(a, b)} e^{j\omega\tau(a, b)}. \quad (1)$$

В последнем выражении опущены некоторые несущественные для изучаемой задачи факторы. Также условимся выписывать все спектральные формулы в предположении  $\omega > 0$ , а выражения для отрицательных частот могут быть легко получены на основании свойств симметрии спектра действительных сигналов [Оппенгейм, Шафер, 1979]. Функция распределения скорости в интервале глубин от свободной поверхности до этой границы известна для всех интересующих нас типов волн. Среда выше реконструируемого горизонта может быть слоистой и характеризоваться гладкими криволинейными границами.

В соответствии с постановкой задачи сейсмической миграции в истинных амплитудах, предложенной С.В. Гольдиным [1992], искомыми являются конфигурация и контрастность границы  $\Omega$ , т. е. требуется найти не только положение глубинной границы, но и скорость в нижележащем слое, или, что эквивалентно (с учетом известных допущений), коэффициент отражения от этой границы  $\mu = \mu(\xi)$ , который может зависеть как от латеральных координат, так и от угла падения/отражения.

#### АЛГОРИТМ МИГРАЦИИ, ПРЕДЛОЖЕННЫЙ С.В. ГОЛЬДИНЫМ

В работах С.В. Гольдина прослеживается следующая логика рассуждений. Пусть имеется поле отраженной волны, моделью которой являются выражение (1). Требуется сконструировать такое линейное преобразование  $P[U]$ , в результате действия которого на зарегистрированную волну получим в каждой глубинной точке на сетке импульс, амплитуда которого пропорциональна коэффициенту отражения глубинной границы в этой точке:

$$P[U] = k_{ab}\mu S(\omega). \quad (2)$$

Этот принцип используется для построения изображения как по монотипным, так и по обменным волнам. Задав шаг по глубинной и латеральным координатам, вычисляется акустическая контрастность (т. е. коэффициент отражения) для каждого узла сетки. Затем производится построение глубинной границы как геометрического места точек максимальной контрастности.

Выписав формулу (1), С.В. Гольдин сразу переходит к построению алгоритма миграции. С этой целью он постулирует структуру оператора в виде весового интегрирования со сдвигами и одноканальной фильтрации:

$$P[U] = f(\omega) \iint w(a, b) U(a, b, \omega) e^{j\omega\phi(a, b)} da db, \quad (3)$$

где  $w(a, b)$  – весовые множители,  $\phi(a, b)$  – траектория суммирования,  $f(\omega)$  – спектральная характеристика фильтра. Следуя традиции С.В. Гольдина, мы

используем одинаковые упрощенные обозначения для случаев площадных (3D) и профильных (2D) наблюдений, оговаривая, там, где это необходимо, соответствующие особенности.

Как показано в работе [Гольдин, 1991], корректная геометрия искомой отражающей границы будет получена при выборе  $\phi(a, b)$  в виде суммы голографов прямых волн, возбуждаемых в точке построения изображения  $\xi$  и регистрируемых в точках наблюдения и возбуждения  $b$  и  $a$  (иногда такую волну называют *дифрагированной волной*, и отсюда происходит известный термин *дифракционное суммирование*). Этот результат понятен, он имеет прозрачное геофизическое толкование и относится к кинематическому аспекту задачи. Поэтому здесь мы на нем останавливаться не будем и рассмотрим вывод таких весовых множителей, использование которых обеспечит соблюдение условия (2).

На основании метода преобразования разрывов С.В. Гольдиным [1988] была получена оценка интеграла (3), в который подставляется волновое поле (1), в виде

$$\begin{aligned} f(\omega) \iint w(a, b) \mu S(\omega) \frac{k_{ab}}{L(a, b)} e^{j\omega(\tau(a, b) - \phi(a, b))} da db &\approx \\ &\approx \mu S(\omega) f(\omega) \rho(\omega) w(\tilde{a}, \tilde{b}) \times \\ &\times \frac{k_{\tilde{a}\tilde{b}}}{L(\tilde{a}, \tilde{b}) \sqrt{\left| \frac{\partial^2(\tau(\tilde{a}, \tilde{b}) - \phi(\tilde{a}, \tilde{b}))}{\partial \tilde{a} \partial \tilde{b}} \right|}} e^{j\omega(\tau(\tilde{a}, \tilde{b}) - \phi(\tilde{a}, \tilde{b}))}, \end{aligned} \quad (4)$$

где точки, имеющие вектор-координаты  $\tilde{a} = (\tilde{a}_x, \tilde{a}_y)$  и  $\tilde{b} = (\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)$ , определяются как точки касания кривых  $\tau$  и  $\phi$ :

$$\left. \frac{\partial(\tau(a, b) - \phi(a, b))}{\partial b} \right|_{b=\tilde{b}} = 0, \quad \left. \frac{\partial(\tau(a, b) - \phi(a, b))}{\partial a} \right|_{a=\tilde{a}} = 0. \quad (5)$$

Формулы (5) в задаче 3D следует понимать как градиенты по вектор-координатам (в задаче 2D – первые производные), а выражение

$$\left| \frac{\partial^2(\tau(\tilde{a}, \tilde{b}) - \phi(\tilde{a}, \tilde{b}))}{\partial \tilde{a} \partial \tilde{b}} \right|$$

в случае 3D оказывается модулем определителя матрицы вторых смешанных производных, вычисляемого в точке  $\tilde{a} = (\tilde{a}_x, \tilde{a}_y)$ ,  $\tilde{b} = (\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)$ .

В выражении (4) фигурирует спектральная характеристика оператора одноканальной фильтрации  $\rho(\omega)$ . Она описывает искажения формы импульса за счет несинфазного накапливания и оказывается различной для ситуаций 2D и 3D. Понятно, что спектральная характеристика искомого корректирующего фильтра определяется как  $f(\omega) = 1 / \rho(\omega)$ . Эти вопросы неоднократно освещались в соответствующей литературе, потому мы, оставляя их без рассмотрения, переходим к выбору весовой функции.

Сопоставляя результат преобразования (4) с желаемым результатом (2), приходим к выводу, что искомый коэффициент отражения будет восстановлен, если выбрать

$$w(\tilde{a}, \tilde{b}) = L(\tilde{a}, \tilde{b}) \sqrt{\left| \frac{\partial^2(\tau(\tilde{a}, \tilde{b}) - \phi(\tilde{a}, \tilde{b}))}{\partial \tilde{a} \partial \tilde{b}} \right|}. \quad (6)$$

Такую весовую функцию построить не удастся, так как в нее входят величины  $L(\tilde{a}, \tilde{b})$  и  $\tau(\tilde{a}, \tilde{b})$ , кото-

рые зависят от конфигурации реконструируемой глубинной границы в точке отражения луча. При этом глубинная граница является искомой, и ее геометрия на данном этапе обработки нам неизвестна.

В поиске выхода из положения С.В. Гольдин обратился к основам динамической теории распространения упругих волн. В результате им было получено базовое выражение, связывающее геометрическое расхождение с производными годографа волны в виде [Goldin, 1986]:

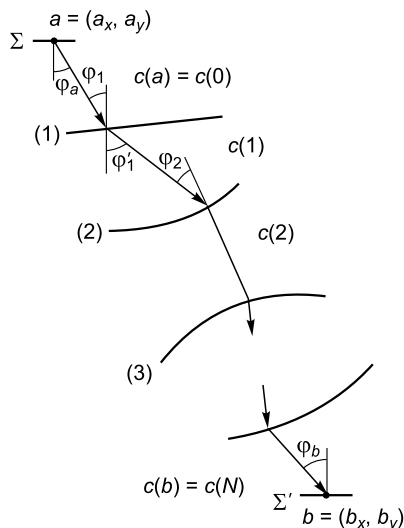
$$L(a, b) = \frac{\sqrt{\cos \varphi_a \cos \varphi_b}}{c(a)} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{\partial^2 \tau(a, b)}{\partial a \partial b} \right|}}, \quad (7)$$

где  $\varphi_a$  – угол выхода луча волны из источника,  $\varphi_b$  – угол подхода луча к приемнику,  $c(a)$  – скорость распространения волны вблизи источника (см. рис. 1). Совокупность времен распространения волны заданного типа для всех положений источника колебаний и пунктов регистрации принято называть полем времен, и этим понятием мы будем пользоваться в дальнейшем.

Фактически, выражение (7) постулирует взаимно однозначное соответствие кинематики и динамики волны. В самом деле, на основании закона Бендорфа [Гольдин, 1979] косинус угла может быть выражен через первую производную годографа как

$$\begin{aligned} \cos \varphi_a &= \sqrt{1 - \left( c(a) \frac{\partial \tau(a, b)}{\partial a} \right)^2} \quad \text{и} \\ \cos \varphi_b &= \sqrt{1 - \left( c(b) \frac{\partial \tau(a, b)}{\partial b} \right)^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

и после подстановки (8) в (7) в правой части равенства будут фигурировать только производные годографа, т. е. кинематические характеристики сигнала.



**Рис. 2.** Условные обозначения, использованные для записи формул: цифры в круглых скобках показывают порядковый номер границы;  $c(v)$  – локальное значение скорости волны интересующего нас типа в  $v$ -м слое;  $\varphi_v$  – угол, образуемый нормалью к  $v$ -й границе в точке падения луча и траекторией луча;  $\varphi'_v$  – угол преломления луча;  $a$  и  $b$  – точки, расположенные соответственно на уровнях  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ .

Равенство (7) было успешно использовано С.В. Гольдиным [1992] для преодоления указанной трудности. Как результат, им был построен оператор миграционного преобразования с сохранением истинных амплитуд. Здесь мы не будем воспроизводить рассуждения С.В. Гольдина, на основании которых была получена весовая функция динамического миграционного преобразования, отсылая читателя к уже цитированной выше работе [Гольдин, 1992]. Заметим лишь, что для этого требуется, используя в (7) обозначения  $a = \tilde{a}$  и  $b = \tilde{b}$ , подставить (7) в (6), после чего веса оказываются зависящими лишь от кинематических характеристик. После несложных математических манипуляций, связанных с вычислением производных годографов волн, фигурирующих в этих выражениях, приходим к весовой функции, не зависящей от конфигурации искомой границы, что и требовалось получить. Таким образом, теперь нам известны траектория суммирования, корректирующий фильтр, а также функция весов. Тем самым, оператор миграционного преобразования оказывается построенным.

Базовое выражение (7) встречается в геофизической литературе, однако его вывод оказывается сложным и основанным на математическом аппарате так называемых матричных пропагаторов [Hubral et al., 1992; Cerveny, 2001]. Поэтому, на наш взгляд, эта формула требует прозрачного пояснения в терминах, знакомых и понятных геофизику. Привести наглядное толкование полученного соотношения кинематических и динамических свойств сигнала также актуально ввиду того, что важность равенства (7) не ограничивается только его применением в задаче сейсмической миграции. По утверждению известного специалиста по лучевым методам в сейсморазведке и сейсмологии В. Червени [Cerveny, 2001], оно находит многочисленные приложения в теории и практике анализа сейсмических данных.

#### СПОСОБ ВЫВОДА БАЗОВОГО ВЫРАЖЕНИЯ (7)

Рассмотрим неоднородную среду, которая может быть слоистой и характеризоваться гладкими криволинейными границами. Пусть внутри какого-либо слоя среды можно определить плоскую (вообще говоря, наклонную) площадку  $\Sigma$ . Присвоим этому слою нулевой порядковый номер. Подошвой слоя будет граница, имеющая порядковый номер  $v = 1$  (рис. 2). Скорость волны интересующего нас типа в  $v$ -м слое обозначим через  $c(v)$ . Также будем считать, что можно определить плоскую (вообще говоря, наклонную) площадку  $\Sigma'$  в пределах  $N$ -го слоя, кровлей этого слоя будет граница, имеющая порядковый номер  $v = N$ .

Простота и геофизическая наглядность предлагаемого нами вывода базового выражения (7) заключается в следующей логике рассуждений. Предположим, что на выбранную площадку  $\Sigma$  падает некоторая эталонная волна. Пройдя через фрагмент среды, волна приходит на  $\Sigma'$ . Поле, которое мы могли бы наблюдать на этом уровне, связано с полем исходной волны оператором прямого продолжения через заданный фрагмент. Теперь применим к полю на  $\Sigma'$  обращенное продолжение назад на исходный уровень. Понятно, что мы должны восстановить исходную волновую картину. Это восстановление реализуется с точностью до коэффициента, который играет важную роль и который будет нами специально изучен. Именно такая последовательность рассуждений приведет нас к иско-

тому результату. Мы будем опираться на метод стационарной фазы [Федорюк, 1977], который позволяет получать асимптотические оценки интегралов. Также нам потребуется сейсмический принцип взаимности. Интегралы, которые будут использоваться в процессе рассуждений, оказываются интегральными выражениями оператора продолжения волнового поля. Получая их оценки, мы приходим к произведению геометрического расхождения на производные поля времен, и это позволит нам вывести искомое соотношение.

В виде эталонного сигнала выберем плоскую волну, падающую на  $\Sigma$  под углом  $\theta$  (рис. 3). Тогда спектральная характеристика волнового поля на  $\Sigma$  описывается как

$$U_{\Sigma}(a, \omega) = S(\omega) e^{j \frac{\omega}{c(0)} \gamma a}, \quad (9)$$

где  $S(\omega)$ , как и прежде, обозначает спектр импульса,  $a$  – площадная вектор-координата точек на  $\Sigma$ ,  $\gamma = (\sin \theta, \cos \theta)$  – волновой вектор.

Продолжение поля на  $\Sigma'$  производится в соответствии с интегральным выражением [Петрашень, Нахамкин, 1973]

$$U_{\Sigma'}(b, \omega) = \int_{a \in \Sigma} U_{\Sigma}(a, \omega) \frac{\partial}{\partial n_{\Sigma}} G(a, b, \omega) da. \quad (10)$$

В выражении (10)  $\frac{\partial}{\partial n_{\Sigma}}$  – оператор вычисления производной по нормали к  $\Sigma$ ,  $G(a, b, \omega)$  – спектральная характеристика функции Грина, являющейся полем волны, излученной источником, порождающим импульс в виде дельта-функции, расположенным в точке  $b$  на  $\Sigma'$ , и зарегистрированной в точке  $a$  на  $\Sigma$ :

$$G(a, b, \omega) = A(a, b) e^{j \omega \tau(a, b)}, \quad A(a, b) = \frac{k_{ab}}{L(a, b)},$$

где  $k_{ab} = \prod_{v=1}^N k_{v-1, v}$  – произведение коэффициентов

преломления волны на промежуточных глубинных границах, с которыми она взаимодействовала на пути от источника к приемнику:  $k_{v-1, v}$  – коэффициент преломления волны на границе с порядковым номером  $v$  при падении на нее волны из слоя с порядковым номером  $v-1$ .

Построим лучевую схему волны  $G$ , обозначая через  $\varphi_v$  угол подхода луча к  $v$ -й границе, а через  $\varphi'_v$  – угол преломления луча. С учетом традиционных для лучевого метода асимптотических предположений имеем

$$\frac{\partial}{\partial n_{\Sigma}} G(a, b, \omega) = \frac{j \omega \cos \varphi_a}{c(a)} G(a, b, \omega), \quad (11)$$

где через  $c(a)$  обозначено локальное значение скорости в первом слое в окрестности точки  $a$ . При выводе последнего выражения также принималось во внимание следствие закона Бендорфа:

$$\frac{\partial \tau(a, b)}{\partial n_{\Sigma}} = \frac{\cos \varphi_a}{c(a)}.$$

Подставив (9) и (11) в (10), получим интегральное выражение для волнового поля на  $\Sigma'$ :

$$U_{\Sigma'}(b, \omega) = \frac{\rho(\omega) S(\omega)}{c(a)} \int_{a \in \Sigma} \cos \varphi_a \frac{k_{ab}}{L(a, b)} e^{j \omega \left( \tau(a, b) + \frac{\gamma a}{c(0)} \right)} da. \quad (12)$$

В дальнейших рассуждениях будем учитывать, что, согласно принципу Ферма [Кравцов, Орлов, 1980], луч распространяется из  $b$  в  $a$  по той же траектории, что и из  $a$  в  $b$ , отсюда также следует, что  $\tau(a, b) = \tau(b, a)$ .

Применим к полю (12) обращенное продолжение на исходный уровень  $\Sigma$  в точку, имеющую вектор-координату  $p$ , и в результате восстановим  $U_{\Sigma}$ . В качестве функции Грина следует выбирать волну, имеющую спектральную характеристику комплексно сопряженную волне, вызванной источником, расположенным в  $p$  и регистрируемой в  $b$ :

$$G^*(b, p, \omega) = A(b, p) e^{-j \omega \tau(b, p)}, \quad (13)$$

где  $A(b, p) = \frac{k_{bp}}{L(b, p)}$ ,  $k_{bp} = \prod_{v=1}^N k_{v, v-1}$ .

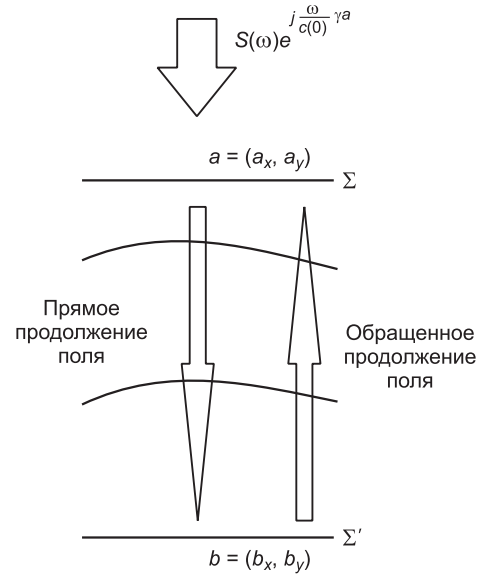
Звездочка в выражении (13) обозначает комплексно сопряженную величину. Очевидно, что  $k_{bp} = k_{ba}$ .

Как и при прямом продолжении поля, для получения оператора преобразования требуется посчитать производную функции Грина (13) по нормали к поверхности интегрирования  $\Sigma'$ . Используя те же соображения, которые были задействованы при выводе выражения (11), приходим к

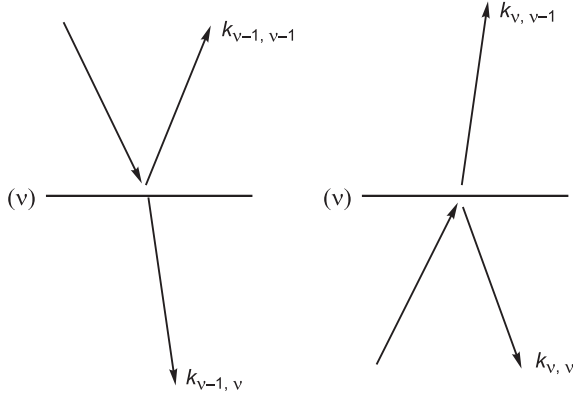
$$\frac{\partial}{\partial n_{\Sigma'}} G^*(b, p, \omega) = -\frac{j \omega \cos \varphi_b}{c(b)} G^*(b, p, \omega), \quad (14)$$

где через  $c(b)$  обозначено локальное значение скорости в последнем слое в окрестности точки  $b$ .

Важно иметь в виду, что восстановление амплитуды эталонной плоской волны происходит с точностью до множителя  $k_{ab} k_{ba}$ , так как выбранная схема волнового продолжения оказывается необратимой. Дело в том, что при распространении в слоистой среде (что имитируется процедурой прямого продолжения) энергия волны, взаимодействующей с каждой



**Рис. 3.** Условная схема мысленного сейсмического эксперимента и волновых преобразований, использованных для вывода выражения (7). Плоская волна, падающая на фрагмент среды, заключенный между площадками  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , имеет спектральную характеристику (9). К ней последовательно применяются прямое и обращенное продолжения. Вектор-координата  $a = (a_x, a_y)$  задана на  $\Sigma$ , а  $b = (b_x, b_y)$  – на  $\Sigma'$ .



**Рис. 4.** Условные обозначения, использованные при записи формул, в которых фигурируют коэффициенты отражения и прохождения для  $v$ -й границы.

$v$ -й промежуточной глубинной границей, претерпевает расщепление на энергии отраженной и преломленной волн (рис. 4). Обратимость процедуры продолжения поля в слоистой среде достигается путем учета всей энергии волны, взаимодействовавшей с каждой  $v$ -й глубинной границей. Иначе говоря, пусть в процессе обращенного продолжения требуется восстановить динамику волны, падавшей на границу  $v$  из слоя  $v - 1$ . Тогда, как результат прямого продолжения поля волны единичной амплитуды через границу  $v$ , имеем две волны: отраженную и преломленную, амплитуды которых соответственно равны  $k_{v-1, v-1}$  и  $k_{v-1, v}$ , где  $k_{v-1, v-1}$  – коэффициент отражения от границы  $v$  при падении волны из слоя  $v - 1$ . Применив обращенное продолжение для каждой из этих волн и сложив результаты, получим одну волну, имеющую амплитуду  $\chi_v$ , где  $\chi_v = k_{v-1, v-1}^2 + k_{v-1, v} k_{v, v-1}$ . Воспользуемся выражениями для коэффициентов отражения и прохождения, приведенными, например в работе Г.С. Подъяпольского [1966], включенной в Справочник геофизика. В результате несложных арифметических преобразований приходим к  $\chi_v = 1$ , что и требовалось показать.

Обращенное продолжение поля реализуется при помощи интегрального выражения, которое аналогично формуле (12), но в котором в качестве спектральной характеристики поля фигурирует  $U_{\Sigma'}(b, \omega)$ , а функция Грина и ее производная по нормали к  $\Sigma'$  определяются из (13). Таким образом, для последовательности прямого и обращенного продолжений будем иметь двукратный интеграл по переменным  $a$  и  $b$ , вычисляемый по соответствующим поверхностям:  $a \in \Sigma$  и  $b \in \Sigma'$ . Его значение получим по методу стационарной фазы для кратных интегралов [Bleistein et al., 2001], который в нашем случае выглядит следующим образом: если имеется интеграл

$$J(p, \omega) = \iint_{a, b} g(a, b) e^{j\omega\sigma(p, a, b)} da db, \quad (15)$$

то оценка вычисляется как

$$J(p, \omega) \approx \frac{2\pi}{\omega} g(\tilde{a}, \tilde{b}) \frac{1}{\sqrt{|\det \Gamma_{\tilde{a}\tilde{b}}|}} e^{j\omega\sigma(p, \tilde{a}, \tilde{b}) + j\frac{\pi}{4}}. \quad (16)$$

Значения  $\tilde{a}$  и  $\tilde{b}$  определяются из условия стационарности фазы, т. е. равенства нулю вектора градиента фазовой функции  $\nabla_{ab}\sigma(p, a, b)|_{a=(\tilde{a}_x, \tilde{a}_y), b=(\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)} = 0$ . В нашем случае  $\sigma(p, a, b) = \tau(a, b) - \tau(p, b)$ .

Через  $\Gamma_{\tilde{a}\tilde{b}}$  обозначен определитель матрицы вторых производных по координатам  $a_x, a_y, b_x, b_y$ , вычисляемый в точках стационарности фазы:

$$\Gamma_{\tilde{a}\tilde{b}} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \sigma(p, a, b)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 \sigma(p, a, b)}{\partial b \partial a} \\ \frac{\partial^2 \sigma(p, a, b)}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 \sigma(p, a, b)}{\partial b^2} \end{vmatrix}_{a=(\tilde{a}_x, \tilde{a}_y), b=(\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)}. \quad (17)$$

Такая матрица имеет размерность  $4 \times 4$  и состоит из четырех подматриц размера  $2 \times 2$ .

Очевидно, что для точек стационарности фазы выполняется  $\frac{\partial^2 \sigma(p, a, b)}{\partial b^2} \Big|_{b=(\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)} \equiv 0$ . Таким образом,

правая нижняя подматрица в (17) состоит из нулевых элементов, поэтому модуль определителя матрицы  $\Gamma_{\tilde{a}\tilde{b}}$  равен квадрату определителя матрицы  $\frac{\partial^2 \sigma(p, a, b)}{\partial b \partial a} \Big|_{a=(\tilde{a}_x, \tilde{a}_y), b=(\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)}$ , имеющей размерность  $2 \times 2$ .

Кроме того,  $\frac{\partial \tau(p, b)}{\partial a} \equiv 0$ . Поэтому

$$|\det \Gamma_{\tilde{a}\tilde{b}}| = \left( \det \frac{\partial^2 \tau(a, b)}{\partial a \partial b} \Big|_{a=(\tilde{a}_x, \tilde{a}_y), b=(\tilde{b}_x, \tilde{b}_y)} \right)^2.$$

После вычисления интеграла имеем точки  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $p$ , в которых выполняется условие стационарности фазы. Эти точки расположены на лучевой траектории, и для них справедлив принцип Ферма. Именно для них мы будем выписывать все дальнейшие формулы, поэтому после сделанной оговорки можно убрать волну над буквой, используя  $a$  вместо  $\tilde{a}$  и  $b$  вместо  $\tilde{b}$ , а также положить  $p = a$ .

С учетом сказанного, подставив (11) и (14) в (15), приходим к оценке в виде (16), откуда следует выражение для амплитуды сигнала (равной произведению  $k_{ab}k_{ba}$ ), претерпевшего прямое и обращенное продолжения:

$$k_{ab}k_{ba} = \frac{\cos \varphi_a \cos \varphi_b}{c(a) c(b)} \frac{A(a, b)A(b, a)}{\left| \frac{\partial^2 \tau(a, b)}{\partial a \partial b} \right|}. \quad (18)$$

Заметим, что на основании формулы (16) можно легко вывести и выражение для спектральной характеристики оператора корректирующей фильтрации, которое также являлось искомым в статье С.В. Гольдина [1992] и которое было им получено в отдельной работе [Гольдин, 1988] из соображений преобразования разрывов.

От равенства (18) переходим к

$$L(a, b)L(b, a) = \frac{\cos \varphi_a \cos \varphi_b}{c(a) c(b)} \frac{1}{\left| \frac{\partial^2 \tau(a, b)}{\partial a \partial b} \right|}. \quad (19)$$

Согласно упомянутой выше главе из Справочника геофизика [Подъяпольский, 1966], для коэффициентов прохождения  $v$ -й границы имеем выражения

$$k_{v-1, v} = \frac{2c(v) \cos \varphi_v}{c(v) \cos \varphi_v + c(v-1) \cos \varphi'_v} \quad \text{и}$$

$$k_{v, v-1} = \frac{2c(v-1) \cos \varphi'_v}{c(v-1) \cos \varphi'_v + c(v) \cos \varphi_v}.$$

Отсюда получим соотношение

$$k_{v-1,v}c(v-1)\cos\varphi'_v = k_{v,v-1}c(v)\cos\varphi_v. \quad (20)$$

Теперь нам потребуется сейсмический принцип взаимности, согласно которому  $A(a,b) = A(b,a)$ . Более подробную информацию о принципе взаимности можно почерпнуть из книги [Уайт, 1986], одним из переводчиков которой был С.В. Гольдин. Тогда имеем

$$\frac{\prod_{v=1}^N k_{v-1,v}}{L(a,b)} = \frac{\prod_{v=1}^N k_{v,v-1}}{L(b,a)},$$

и с учетом (20) получаем

$$L(a,b)\frac{c(a)}{c(b)}\prod_{v=1}^N \frac{\cos\varphi'_v}{\cos\varphi_v} = L(b,a).$$

Подставив последнее равенство в (19), приходим к окончательному выражению

$$L(a,b) = \frac{\sqrt{\cos\varphi_a \cos\varphi_b}}{c(a)} \sqrt{\frac{\prod_{v=1}^N \cos\varphi_v}{\prod_{v=1}^N \cos\varphi'_v}} \cdot \sqrt{\frac{\partial^2 \tau(a,b)}{\partial a \partial b}}. \quad (21)$$

Мы получили формулу, выражающую взаимосвязь геометрического расхождения с производными годографа прямой волны, не претерпевшей актов отражения на пути от источника к приемнику. Ввиду того, что в рамках лучевых представлений не делается различий между актами преломления и отражения, все выражения для прямых волн оказываются справедливыми и для отраженных волн. Тем самым, равенство (21) также описывает свойства волн, претерпевших акты отражения на пути от источника к приемнику: однократных и многократных. Волна, претерпевшая отражения, проходит через один и тот же слой как минимум дважды. Это следует учесть в процессе нумерации слоев при построении лучевой схемы: один слой будет иметь несколько порядковых номеров. Тогда в силу свойства локальности волновых процессов [Петрашень, Нахамкин, 1973] можно учесть латеральные вариации скорости в слоях.

Значимость равенства (7) не исчерпывается тем, что на его основании построен оператор миграции. В частности, при решении прямых задач мы имеем возможность посчитать амплитуду волны двумя разными способами, что обеспечивает верифицируемость результата. Действительно, располагая оценкой модели среды, можно применить выражения, полученные, например А.С. Алексеевым и Б.Я. Гельчинским [1959], и посчитать геометрическое расхождение как функцию локальных радиусов кривизны глубинных границ, толщин слоев и интервальных скоростей. С другой стороны, этот же фактор может быть вычислен в соответствии с (7), что позволяет повысить точность и надежность расчетов. На основании приведенных равенств также можно развивать методы решения обратной кинематической задачи, связывая кривизну годографа наблюдаемой волны с неизвестными параметрами глубинно-скоростной модели среды [Урупов, Левин, 1985; Shah, 1973]. Таким образом, выражение (7) может играть важную самостоятельную роль как в динамической теории упругих волн, так и в иных приложениях.

Однако уже тот факт, что найденная взаимосвязь производных поля времени с геометрическим расхождением сделала возможным получение алгоритма миграции в истинных амплитудах, позволил С.В. Гольдину [2004] отнести это открытие к фундаментальным достижениям теоретической геофизики XX в.

При изучении отраженных волн для трасс нулевого удаления источник–приемник или для трасс произвольного удаления в случае горизонтально-слоистой

среды выполняется  $\prod_{v=1}^N \frac{\cos\varphi_v}{\cos\varphi'_v} = 1$ . Тогда равенство (21)

преобразуется в формулу (7), которая, по свидетельству коллег С.В. Гольдина [Schleicher et al., 1993], была им получена как раз для случая плоско-параллельных границ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для получения соотношения, выражающего взаимосвязь геометрического расхождения волны с производными ее годографа в слоистой среде, были привлечены процедуры прямого и обращенного продолжения волнового поля, а также сейсмический принцип взаимности.

Эффекты взаимодействия волны с глубинными границами приводят к тому, что в полученной формуле фигурирует произведение отношений косинусов углов падения/преломления. Следствием этого является невозможность корректного оценивания амплитуды волны непосредственно по производным годографа (за исключением случая отраженной волны, распространяющейся в плоско-параллельной среде, или, приближенно, для трасс ближних удалений источник–приемник), т. е. не удастся однозначно соотнести кинематику волны с динамическими факторами без привлечения информации о глубинно-скоростной модели среды. Однако полученное выражение позволяет повысить надежность решения прямых задач, обеспечивая дополнительные средства верификации результата, повышенное быстродействие вычислительных схем и гибкость алгоритмов.

Изученное базовое выражение позволяет не только получить весовые коэффициенты глубинной миграции сейсмограмм, но также эффективно анализировать алгоритмы продолжения поля, “калибруя” их по эталонным локально-плоским волнам. Кроме того, оно представляет самостоятельный интерес в динамической теории волновых процессов, так как выражает важные свойства упругих волн. Использованный способ вывода соотношения придает рассуждениям ясность, наглядность и допускает прозрачную геофизическую интерпретацию.

Все полученные выражения оказываются справедливыми не только для прямых волн, но и для волн, претерпевших однократные или многократные отражения. Корректность перехода от модели слоистой однородной среды к модели локально-однородной среды обеспечивается принципом локальности волновых процессов.

Использование формулы (21) при динамической трассировке луча в задачах моделирования или при расчете функции Грина позволяет избавиться от традиционных ограничений, накладываемых на класс моделей.

## Литература

- Алексеев А.С., Гельчинский Б.Я.** О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Часть III. Л.: Изд-во ЛГУ, 1959. С. 107–160.
- Боганик Г.Н., Гурвич И.И.** Сейсморазведка. Тверь: Изд-во АИС, 2006. 744 с.
- Гольдин С.В.** Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн. М.: Недра, 1979. 344 с.
- Гольдин С.В.** К теории преобразования сейсмограмм в глубинные и временные разрезы // Методы расчета и интерпретации сейсмических волновых полей. Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1991. С. 5–44.
- Гольдин С.В.** Динамический анализ изображений в сейсмике // Геология и геофизика. 1987. № 2. С. 90–98.
- Гольдин С.В.** Преобразование и восстановление разрывов в задачах томографического типа. Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988. 100 с.
- Гольдин С.В.** Оценка коэффициента отражения при миграции обменных и монотипных волн // Геология и геофизика. 1992. № 4. С. 90–105.
- Гольдин С.В.** Идеи Г.А. Гамбурцева и их роль в развитии российской геофизики // Геофизика. 2004. № 1. С. 3–8.
- Гольдин С.В.** Судьба идеи // Технологии сейсморазведки. 2005. № 3. С. 4–6.
- Гольдин С.В.** Теория интерпретации в сейсморазведке и сейсмологии. Новосибирск: ИНГГ СО РАН, 2011. 358 с.
- Денисов М.С.** Где живут дифракторы? // Технологии сейсморазведки. 2008. № 2. С. 97–101.
- Козлов Е.А.** Модели среды в разведочной сейсмологии. Тверь: ГЕРС, 2006. 479 с.
- Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.** Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
- Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.** Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979. 416 с.
- Петрашень Г.И., Нахамкин С.А.** Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. Л.: Наука, 1973. 171 с.
- Петрашень Г.И., Рудаков А.Г.** О недопустимых искажениях законов природы в фундаментальных задачах технологической сейсморазведки // Технологии сейсморазведки. 2008. № 2. С. 86–94.
- Подьяпольский Г.С.** Физика упругих волн // Справочник геофизика. М.: Недра, 1966. Т. IV. С. 28–96.
- Тимошин Ю.В.** Основы дифракционного преобразования сейсмических записей. М.: Недра, 1972. 264 с.
- Тимошин Ю.В.** Импульсная сейсмическая голография. М.: Недра, 1978. 288 с.
- Уайт Дж.Э.** Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 263 с.
- Урупов А.К., Левин А.Н.** Определение и интерпретация скоростей в методе отраженных волн. М.: Недра, 1985. 288 с.
- Федорюк М.В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
- Bleistein N., Cohen J.K., Stockwell J.W.** Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion. New York: Springer, 2001. 510 p.
- Cerveny V.** Seismic ray theory. Cambridge University Press, 2001. 713 p.
- Goldin S.V.** Seismic travelt ime inversion. SEG, 1986. 350 p.
- Hubral P., Schleicher J., Tygel M.** Three-dimensional paraxial ray properties. Part 1: basic relations // J. Seis. Expl. 1992. N 1. P. 265–279.
- Schleicher J., Tygel M., Hubral P.** 3-D true-amplitude finite-offset migration // Geophysics. 1993. V. 58, N 8. P. 1112–1126.
- Schneider W.A.** Integral formulation for migration in two and three dimensions // Geophysics. 1978. V. 43, N 1. P. 49–76.
- Shah P.M.** Use of wavefront curvature to relate seismic data with subsurface parameters // Geophysics. 1973. V. 38, N 5. P. 812–825.

*Статья поступила в редакцию 18 апреля 2016 г.,  
окончательном варианте – 18 мая 2016 г.*

## КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

**ДЕНИСОВ Михаил Сергеевич** – доктор физико-математических наук, директор по науке компании ООО “ГЕО-ЛАБ”.  
E-mail: denisovms@gmail.com, тел.: +7(910)433-74-48