



КРИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ МОДЕЛИ РАЗРЫВА СМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СРЕД С ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Т.И. Чичинина¹, И.Р. Оболенцева², Г.А. Дугаров²

¹Мексиканский институт нефти,

07730, Мехико, Эхе Сентрал Лазаро Карденас, 152, Мехико, e-mail: tichqvoa@yahoo.com

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,

630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3, Россия, e-mail: irolentseva@ngs.ru, geserdugarov@gmail.com

Дается обзор эффективных моделей упругих сред, содержащих ориентированные трещины. Наиболее подробно освещаются среды с одной системой параллельных трещин, вертикальных или горизонтальных, в изотропной вмещающей среде. Эффективной моделью таких сред является трансверсально-изотропная среда (ТИ) с осью симметрии бесконечного порядка, нормальной плоскостям трещин; модель ТИ полностью описывается пятью независимыми упругими константами. Мы анализируем наиболее известную и применяемую модель разрыва смещений Linear Slip (Линейного Проскальзывания) – с четырьмя независимыми упругими константами, в которые входят нормальная и касательная ослабленности трещин и два параметра Ламе изотропной среды, вмещающей трещины. Пятая константа (c_{13}) модели Linear Slip (LS) считается функцией этих четырех. Нами показано, что такая модель не имеет физического смысла и нарушает принцип симметрии Кюри. Она может применяться только для описания распространения упругих волн в плоскости симметрии, параллельной плоскостям трещин, и по нормали к ней. Для расчетов по остальным направлениям надо обязательно задавать и пятую, независимую, константу c_{13} .

Упругие волны в анизотропных средах, ориентированные трещины, эффективные модели трещиноватых сред, трансверсально-изотропная среда (ТИ), модель Linear Slip (Линейного Проскальзывания)

CRITICAL ANALYSIS OF THEORETICAL BASICS OF DISPLACEMENT DISCONTINUITY MODEL FOR MEDIA WITH ORIENTED FRACTURES

T.I. Chichinina¹, I.R. Obolentseva², G.A. Dugarov²

¹Instituto Mexicano del Petroleo, Eje Central Lazaro Cardenas,

152, Mexico D.F., 07730, Mexico, e-mail: tichqvoa@yahoo.com

²Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, SB RAS,

Acad. Koptuyuga prosp., 3, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: irolentseva@ngs.ru, geserdugarov@gmail.com

Effective models of elastic media with oriented fractures are discussed in the paper. More specifically, they are models with one system of parallel fractures, vertical or horizontal, in isotropic host rock. The conventional effective model is a transversely isotropic (TI) medium with infinite-fold symmetry axis which is normal to fracture planes, is fully described by five independent elastic constants. We analyze the best known and the most-used displacement discontinuity model – Linear Slip (LS). It is identified by four independent elastic constants, which include the normal and tangential weaknesses for fractures and two Lamé parameters for isotropic host rock. The fifth constant c_{13} is believed to be a function of these four constants. We demonstrate that this model makes no physical sense, violates Curie symmetry principle and can be used only to describe elastic wave propagation in the symmetry plane parallel to fracture planes or along the normal to this plane. For other directions, it is necessary to add the fifth, independent, constant c_{13} to the mentioned four.

Elastic waves in anisotropic media, oriented fractures, effective models of fractured media, transversely isotropic medium (TI), Linear Slip model

ВВЕДЕНИЕ

Потребности в поисках и разведке новых нефтегазовых месторождений и их оптимальной эксплуатации ставят перед прикладной геофизикой, и особенно перед сейсморазведкой, различные актуальные задачи. В настоящее время одна из них – развитие и совершенствование методов изучения пород с ориентированными трещинами. Они могут быть носителями углеводородов и путями их миграции, а ориентированность скоплений трещин способствует их обнаружению, так как появляется возможность считать среду анизотропной для волн, длина которых намного больше рас-

стояний между трещинами и размеров трещин (их раскрытости). По данным об анизотропии физических свойств, таких как скорости распространения сейсмических волн, их амплитуды и поглощение, можно найти основные характеристики трещиноватости: ориентацию трещин, их плотность, тип флюида и некоторые другие, представляющие интерес для разведочной геофизики и нефтяной геомеханики.

Анизотропные модели, используемые для описания сред с ориентированной трещиноватостью, являются эффективными моделями. К настоящему време-

ни построено довольно много этих моделей и разработаны способы их применения. В данной статье даётся краткая характеристика основных типов моделей, а затем рассматривается наиболее часто применяемая на практике модель трансверсально-изотропной симметрии, известная как модель Шонберга (Linear Slip) [Schoenberg, 1980, 1983]. Она является длинноволновым эквивалентом среды с одной системой параллельных трещин в изотропной вмещающей среде. Приводится описание модели и подробно освещается ее главная особенность – наличие четырех независимых компонент матриц упругих констант вместо пяти, которыми должна характеризоваться трансверсально-изотропная среда, инвариантная относительно вращений вокруг оси симметрии, которой является нормаль к плоскостям параллельных трещин. Анализируется предложенный М. Шонбергом [Hsu, Schoenberg, 1993; Schoenberg, Sayers, 1995] способ задания недостающей пятой компоненты c_{13} матрицы жесткостей C^* . Показаны ограниченные возможности использования данной модели, которые связаны с произволом в выборе пятой константы c_{13} , в результате которого получаемая матрица жесткости теряет физический смысл и не отвечает принципу симметрии Кюри. Выполненное нами исследование модели разрыва смещений представлено в сжатом виде в расширенных тезисах докладов на конференциях SEG и EAGE [Чичина и др., 2015a; Chichinina et al., 2015].

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭФФЕКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕД С ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Свойства симметрии эффективных моделей

Нами рассматриваются эффективные модели горных пород и геологических формаций с ориентированными трещинами, которые являются их аппроксимацией средами однородными, но анизотропными. Такая аппроксимация нужна для того, чтобы распространение упругих волн в средах с ориентированными трещинами можно было бы описывать наиболее простым способом, т. е. используя эффективный тензор упругих модулей. Описание реальной геологической среды таким способом справедливо, если длины волн намного больше расстояний между трещинами и размеров трещин (их раскрытости).

В зависимости от пространственной ориентации трещин и от того, в породе какой симметрии они находятся, анизотропная модель может принадлежать той или иной системе симметрии. Наибольшее применение нашли модели трансверсально-изотропные и орторомбические [Bakulin et al., 2000a, b], намного реже моноклинные [Bakulin et al., 2000c]. В работе [Grechka, Kachanov, 2006] показано, что для решения практических задач достаточно приближения орторомбической симметрии.

В TI-моделях среда, вмещающая параллельные трещины, считается изотропной. Орторомбические модели (ORT) более соответствуют реальным средам с ориентированными трещинами, потому что позволяют описать одновременно как вертикальные трещины, так и собственную анизотропию вмещающих пород, обу-

словленную тонкослоистостью. При этом возможен учет тонкой слоистости двух типов: тонких слоев с разными скоростями и с одинаковыми, последние относятся к карбонатным породам и к сланцам. В карбонатных породах невидимые границы между тонкими слоями образуются вследствие изменения условий осадконакопления, а в сланцах ими являются промежутки между плоскими горизонтальными глинистыми микрочастицами, образующими породу. Эти промежутки, или же плоскости ослабленности, можно представить в виде параллельных горизонтальных трещин [Sayers, 1999, 2008, 2010, 2013].

Эффективные модели пород с ориентированными трещинами различаются способами их построения, нахождения эффективных параметров и установления связи с характеристиками трещиноватости, интересующими сейсморазведчиков.

Наиболее “правильными” являются модели той или иной системы симметрии, характеризующиеся полным набором констант, свойственным данной системе симметрии. Однако на практике часто и вполне оправданно с практической точки зрения используют не то, что “правильно”, а то, что выгодно. Важную роль в выборе модели играет такой фактор, как число подлежащих определению параметров. Поэтому к настоящему времени наибольшее применение находит модель Linear Slip Шонберга [Schoenberg, 1980, 1983], относящаяся к моделям “нежесткого контакта”, или “разрыва смещений”, которые привлекаются уменьшенным количеством независимых компонент матрицы жесткости, описывающей среду с параллельными трещинами, и введением характеристик трещиноватости непосредственно в матрицы жесткости [Bakulin et al., 2000a].

Модели разрыва смещений

Впервые модель разрыва смещений в сейсмике ввел К.Д. Клем-Мусатов [Клем-Мусатов и др., 1973; Айзенберг и др., 1974], назвав ее “импедансной”. Однако известность и применение на практике такая модель получила в результате работ М. Шонберга [Schoenberg, 1980, 1983; Schoenberg, Douma, 1988; Schoenberg, Muir, 1989; Hsu, Schoenberg, 1993; Schoenberg, Sayers, 1995; и др.], который назвал ее “linear slip” или “displacement discontinuity” (линейного проскальзывания или разрыва смещений). К.Д. Клем-Мусатов и М. Шонберг шли к построению своих моделей разными путями: у первого модель обоснована более строго математически, в то время как у второго, как он сам написал во введении к статье [Schoenberg, 1980], на первом плане эмпирические соображения. Сравнение моделей Клем-Мусатова и Шонберга выполнено в работе [Оболнцева, Чичина, 2010]: показана их идентичность как эффективных моделей упругих сред с параллельными трещинами, описываемых четырьмя независимыми диагональными компонентами матриц упругих модулей.

Модель Linear Slip Шонберга является частным случаем общей модели трансверсально-изотропной среды. Обе модели имеют схожую структуру (симметрию) матрицы упругих модулей, но существенная разница состоит в том, что в модели LS имеется только

* С целью унификации терминологии для матриц C и S мы используем принятые в англоязычной литературе названия “матрица жесткости” C (“stiffness matrix”) и “матрица податливости” S (“compliance matrix”). Матрицы C и S по сути являются тензорами четвертого ранга, записанными в виде матриц 6×6 по правилу Фойгта. Поэтому для элементов матриц C и S термин “компоненты” можно употреблять наравне с термином “элементы”.

четыре независимых компоненты матрицы упругих модулей, а пятая (c_{13}) связана с остальными компонентами определенным соотношением [Hsu, Schoenberg, 1993]. Анализ физического смысла этого соотношения и посвящена настоящая статья.

Надо заметить, что некоторыми русскоязычными читателями название модели Шонберга “Linear Slip” – “линейного проскальзывания” – воспринимается как разрыв смещений только в плоскости трещины, т. е. учитывается только сдвиговая деформация в этой плоскости, в то время как у М. Шонберга в разрыв смещений в общем случае входит и смещение по нормали к плоскости трещины. В английском языке слово “slip” имеет множество значений, и одно из них – проскользнуть незаметно, чтобы никто не заметил. Такое толкование тоже подходит в рассматриваемом случае, поскольку пространство, занятое всеми параллельными трещинами, выпадает из среды, т. е. совокупная трещина-плоскость не имеет толщины, а ее присутствие выражается в уменьшении нормальной и касательной деформаций в среде выше и ниже этой “нематериальной” трещины-плоскости. Этот вариант толкования названия модели Шонберга обсуждался И.Р. Оболенцевой с В.Ю. Гречкой, и он тоже считает его наиболее подходящим.

Модели разрыва смещений были представлены и другими авторами [Kitsunozaki, 1983; Pyrak-Nolte, Cook, 1987; Pyrak-Nolte et al., 1990a, 1990b; Pyrak-Nolte et al., 1996; Gu et al., 1996; Pyrak-Nolte, 2007; Shao, Pyrak-Nolte, 2013] под названием “displacement discontinuity”. В них рассматриваются различные аспекты этой модели. Среди перечисленных работ особо надо отметить публикации Л. Пирак-Нолт, из которых следует, что модель разрыва смещений, разработанная М. Шонбергом с соавторами, далеко не всегда может давать правильные результаты, поскольку оперирует с абстрактной суммарной “трещиной”, к тому же не имеющей толщины. Реальные же трещины отличаются друг от друга жесткостью и геометрией, что приводит к сильным изменениям волнового поля [Pyrak-Nolte, 2007]. Кроме того, волновое поле может претерпеть значительные изменения и вследствие возникновения трещинных поверхностных волн [Pyrak-Nolte, Cook, 1987; Pyrak-Nolte et al., 1996; Shao, Pyrak-Nolte, 2013].

Модель Хадсона

От модели Linear Slip Шонберга [Schoenberg, 1980, 1983] можно перейти к более сложным, в первую очередь к модели Хадсона для монетообразных трещин [Hudson, 1980, 1981, 1988; Hudson et al., 1996]. Как показано в статье [Bakulin et al., 2000a], общим в моделях Шонберга и Хадсона является одинаковая структура матрицы упругих модулей в том смысле, что в обеих имеются только четыре независимых компоненты матрицы, тогда как пятая (c_{13}), становится зависимой, связанной с остальными определенным соотношением [Hsu, Schoenberg, 1993]. Переход от модели Шонберга к модели Хадсона делается путем замены двух параметров трещин (нормальной и касательной ослабленностей) в матрице жесткости модели Шонберга функциями, зависящими от параметров модели Хадсона, таких как плотность трещин, их аспектное отношение, константы Ламе заполнителя трещин и изотропной вмещающей среды. В результате появляется возможность отличать трещины, заполненные флюидом, от сухих трещин: первые имеют нормальную ослабленность Δ_N около нуля [Bakulin et al., 2000a,

формулы (14)–(24)]. Сопоставление моделей Шонберга и Хадсона дано в обзорной статье [Grechka, Kachanov, 2006].

Модели с трещинами и порами

Также от модели Linear Slip Шонберга [Schoenberg, 1980, 1983] можно перейти и к модели Томсена [Thomsen, 1995] для среды с трещинами и порами, в которой учитывается обмен флюидом между ними [Bakulin et al., 2000a]. Распространение упругих волн в породах с трещинами и порами исследуется также в ряде других работ, которые в той или иной степени созвучны с моделью Linear Slip Шонберга [Бакулин, Молотков, 1998; Gurevich, 2003].

Учет поглощения

Модели типа Linear Slip позволяют учитывать не только анизотропию скоростей, но и анизотропию поглощения, если нормальную и касательную ослабленности и податливости сделать комплексными, т. е. ввести в них мнимые добавки [Чичина и др., 2006; Chichina et al., 2006, 2007, 2009a–c; Carcione et al., 2012a, b, 2013; Gurevich et al., 2009]. Одним из возможных механизмов поглощения будет возникающий при распространении волны переток флюида между ориентированными трещинами и изометричными порами [Hudson et al., 1996; Pointer et al., 2000; Chapman, 2003, 2009].

Междисциплинарный подход Баюк

Особую группу составляют модели, разработанные И.О. Баюк [2011, 2013], которые основаны на применении теории эффективных сред и решении задач методом обобщенного сингулярного приближения. Показано, что такой подход позволяет получать более детальные сведения о физических характеристиках коллекторов, чем при использовании других известных моделей [Баюк, 2011, 2013]. Детально разработаны методы применения предложенного подхода к таким важным для добычи углеводородов типам пород, как сланцы, песчаники, карбонатные коллекторы, в работах [Баюк, Рыжков, 2010; Баюк, Дьяур, 2012; Баюк и др., 2012; Chesnokov et al., 2009, 2010; и др.]. Найлены возможности определения “неизмеряемых” физических свойств пород, электропроводности и теплопроводности, по упругим свойствам.

Модель Linear Slip

Модель Linear Slip трансверсально-изотропная, введенная М. Шонбергом [Schoenberg, 1980, 1983], которую для краткости мы будем называть LS TI, основана на представлении ориентированных трещин в виде параллельных плоскостей (“плоскостей ослабленности”), на границах каждой из которых выполняются условия нежесткого контакта, состоящие в равенстве векторов напряжений и скачке векторов смещений.

В настоящее время модель LS TI получила широкое применение. Во-первых, она позволяет уменьшить число независимых параметров в матрице жесткости с пяти до четырех. Это означает, что для определения константы c_{13} по данным измерения скоростей в образцах зерна достаточно иметь данные о скоростях продольной (V_p) и поперечной (V_s) волн только по “главным” направлениям распространения, 0 и 90° (относительно плоскости напластования), тогда как измерения скорости V_p под углом 45° уже не требуется в рамках этой модели. Во-вторых, использование мо-

дели LS TI позволяет дать количественную оценку степени трещиноватости (определить плотность трещин), что осуществляется путем введения непосредственно в матрицу жесткости двух параметров трещиноватости: нормальной и касательной ослабленностей, в которые входит плотность трещин [Bakulin et al., 2000a]. В-третьих, в модели LS TI трещины, заполненные жидкостью, имеют нормальную ослабленность Δ_N около нуля, что может послужить индикатором жидкого флюида в трещинах (нефть и/или вода). Если же перейти от ослабленностей Δ_N и Δ_T к податливостям Z_N и Z_T , нормальной и касательной, то по соотношению Z_N/Z_T можно определить тип флюида в трещинах: жидкость – при Z_N/Z_T близком к нулю, газ (“сухие трещины”) – при значениях Z_N/Z_T порядка 1 [Bakulin et al., 2000a].

Ниже дается описание модели разрыва смещений Linear Slip сначала в общем виде, а потом для модели LS TI, т. е. для трансверсально-изотропной симметрии.

Модель LS с несколькими системами трещин разной ориентации в анизотропной вмещающей среде

Такая модель построена авторами статьи [Schoenberg, Sayers, 1995] путем использования математического аппарата, ранее разработанного применительно к монетообразным трещинам [Sayers, Kachanov, 1991; Kachanov, 1992]. Построение модели начинается с введения эффективного тензора податливости s_{ijkl} в законе Гука, записанном как зависимость деформаций ε_{ij} от напряжений σ_{kl} :

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (1)$$

Эффективный тензор податливости трещиноватой среды \mathbf{S} ($\mathbf{S} \equiv s_{ijkl}$) складывается из двух тензоров: тензора податливости среды без трещин \mathbf{S}^b и эффективного тензора податливости самих трещин \mathbf{S}^{fr} , т. е. $\mathbf{S} = \mathbf{S}^b + \mathbf{S}^{fr}$. Последний, \mathbf{S}^{fr} , вводится следующим образом. Деформации ε_{ij} в выражении (1) представляют в виде суммы двух слагаемых: деформаций во вмещающей среде и на трещинах, т. е.

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^b\sigma_{kl} + \frac{1}{2V} \sum_q \int_{S_q} ([u_i]n_j + [u_j]n_i) dS; \quad (2)$$

в первом слагаемом s_{ijkl}^b – тензор податливости \mathbf{S}^b среды без трещин (которая может быть в общем случае как изотропной, так и анизотропной), $\mathbf{S}^b = s_{ijkl}^b$. Во втором слагаемом S_q – поверхность q -ой трещины, находящейся в объеме V , \mathbf{n} – единичный вектор нормали к ее поверхности, которая может быть и криволинейной, а квадратные скобки означают разрыв (скачок) i -й (и/или j -й) компоненты вектора смещения \mathbf{u} на трещине.

Если среда содержит несколько систем плоских параллельных трещин разной ориентации с нормальными \mathbf{n} к их плоскостям, то в линейном приближении скачок смещений на трещине можно представить путем введения матрицы податливости трещин Z_{ij} , удовлетворяющей тождеству

$$\frac{1}{V} \sum_q \int_{S_q} [u_i] dS \equiv Z_{ij}\sigma_{jk}n_k. \quad (3)$$

Матрица податливости трещин Z_{ij} вводится так же, как для среды с монетообразными трещинами [Kachanov, 1992]. Подстановка равенства (3) в (2) позво-

ляет получить эффективный тензор податливости \mathbf{S} для среды с несколькими системами параллельных трещин, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^b + \mathbf{S}^{fr}$, в виде

$$s_{ijkl} = s_{ijkl}^b + \frac{1}{4} \sum_m (Z_{ik}^{(m)}n_i^{(m)}n_j^{(m)} + Z_{jk}^{(m)}n_i^{(m)}n_i^{(m)} + Z_{il}^{(m)}n_k^{(m)}n_j^{(m)} + Z_{jl}^{(m)}n_k^{(m)}n_i^{(m)}). \quad (4)$$

Теперь тензор жесткости \mathbf{C} для модели LS, нужный для нахождения скоростей сейсмических волн, легко получить путем обращения тензора податливости \mathbf{S} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}. \quad (5)$$

Модель Шонберга LS общего вида полностью соответствует описанию (1)–(5).

Модель LS TI с одной системой параллельных трещин в изотропной вмещающей среде

Модель LS TI – это частный случай модели, описываемой выражениями (1)–(5). В ней эффективный тензор податливости \mathbf{S} характеризуется четырьмя независимыми параметрами: двумя константами изотропной вмещающей среды (модули Ламе λ и μ) и двумя константами, характеризующими трещины: нормальной Z_N и касательной Z_T податливостями.

При произвольной ориентации оси симметрии \mathbf{n} , нормальной плоскостям трещин, получаем следующие выражения для матрицы (6 × 6) податливости трещин Z_{ij} :

$$Z_{ij} = Z_N n_i n_j + Z_T (\delta_{ij} - n_i n_j) = Z_T \delta_{ij} + (Z_N - Z_T) n_i n_j.$$

Тогда эффективный тензор податливости трещин \mathbf{S}^{fr} имеет выражение [Schoenberg, Sayers, 1995]

$$s_{ijkl}^{fr} = \frac{Z_T}{4} (\delta_{ik} n_j n_j + \delta_{jk} n_i n_i + \delta_{il} n_k n_j + \delta_{il} n_k n_i) + (Z_N - Z_T) n_i n_j n_k n_l. \quad (6)$$

Искомый тензор податливости \mathbf{S} изотропной среды с параллельными трещинами находим аналогично как сумму тензоров податливости изотропной среды \mathbf{S}^b и параллельных трещин \mathbf{S}^{fr} : $\mathbf{S} = \mathbf{S}^b + \mathbf{S}^{fr}$, где \mathbf{S}^{fr} определяется выражением (6). Тензор жесткости \mathbf{C} определяется как обратный тензору податливости \mathbf{S} : $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$.

Модели LS, чаще всего используемые на практике.

Модель Шонберга LS TI используется довольно часто в сейсморазведке [Bakulin et al., 2000a]. Чаще всего объектом поиска являются вертикальные трещины в изотропной среде, описываемые моделью LS НТИ, т. е. моделью LS TI с горизонтальной осью симметрии (Н – Horizontal). Горизонтальные трещины в изотропной среде можно представлять моделью LS VTI, т. е. с вертикальной осью симметрии (V – Vertical), такие трещины встречаются реже, например, в верхней части сейсмического разреза. К. Сайерс использует модель LS VTI для описания собственной анизотропии сланцев, где за горизонтальные параллельные трещины принимаются плоскости ослабленности, возникающие между горизонтальными глинистыми микрочастицами (имеющими форму микропластинок или чешуек, представляющих собой сланцеватые минералы), [Sayers, 1999, 2008, 2013].

В первом приближении вмещающую трещины среду можно считать изотропной в случае таких оса-

дочных пород как карбонатные, песчаные, алевроитовые, глинистые и смешанного состава. Вообще говоря, аппроксимация вмещающей трещины породы не изотропной средой, а трансверсально-изотропной (особенно для сланцев) более соответствует реальности, так как позволяет учесть тонкую слоистость во вмещающей породе, но тогда такая среда с вертикальными трещинами уже должна иметь своей эффективной моделью анизотропную среду орторомбической симметрии. Этому посвящен ряд работ, краткие сведения можно найти в обзорной статье [Bakulin et al., 2000b], пример такой модели для сланцев дан в работе [Чичина и др., 2015б].

Модель LS НТИ. Пусть горизонтальная ось симметрии \mathbf{n} , нормальная к плоскостям вертикальных трещин, направлена по оси x_1 , т. е. $\mathbf{n}^{\text{НТИ}} = (1, 0, 0)$, в системе координат $x_1x_2x_3$ с осью x_3 , нормальной дневной поверхности, как показано на рис. 1, а.

Тогда в тензоре податливости трещин \mathbf{S}^{fr}

$$s_{1111}^{fr} = Z_N, \quad s_{1212}^{fr} = s_{2121}^{fr} = s_{1221}^{fr} = s_{2112}^{fr} = s_{1313}^{fr} = s_{3131}^{fr} = s_{1331}^{fr} = s_{3113}^{fr} = Z_T / 4,$$

а другие компоненты тензора \mathbf{S}^{fr} равны нулю. Перейдя от тензора четвертого ранга S_{ijkl}^{fr} к матрице \mathbf{S}^{fr} размерности 6×6 в соответствии с принятым для индексов правилом Фойгта (11→1, 22→2, 33→3, 23→4, 13→5, 12→6), получим матрицу податливости для системы вертикальных трещин с горизонтальной осью симметрии x_1 , т. е. симметрии НТИ:

$$\mathbf{S}_{fr}^{\text{НТИ}} = \begin{pmatrix} Z_N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_T \end{pmatrix}.$$

Сложив ее с матрицей податливости \mathbf{S}^b изотропной вмещающей среды с константами Ламе λ, μ , получим матрицу податливости $\mathbf{S}^{\text{НТИ}} = \mathbf{S}^b + \mathbf{S}_{fr}^{\text{НТИ}}$ для среды с вертикальными трещинами (модель LS НТИ):

$$\mathbf{S}^{\text{НТИ}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} + Z_N & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} + Z_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} + Z_T \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Элементы матрицы $\mathbf{S}^{\text{НТИ}}$ в (7) удовлетворяют ограничениям [Schoenberg, Sayers, 1995]:

$$s_{44} \leq s_{55}, \quad -2s_{33} < -2s_{13} < s_{33} \leq s_{11}, \quad s_{13} = s_{23} \equiv s_{33} - \frac{s_{44}}{2}. \quad (8)$$

В изотропной среде коэффициент Пуассона $\nu > 0$ (для горных пород он всегда положителен) и $\nu \equiv -s_{13} / s_{33} = (\lambda / 2) / (\lambda + \mu)$, поэтому второе из ограничений в (8) принимает вид $0 < -2s_{13} < s_{33} \leq s_{11}$. Для нас представляет наибольший интерес последнее из уравнений (8), т. е. следующее ограничение для модели LS НТИ:

$$s_{13} = s_{23},$$

потому что, как будет показано ниже, отсюда следует основополагающее ограничение на константу c_{13} , анализу которого и посвящена эта статья.

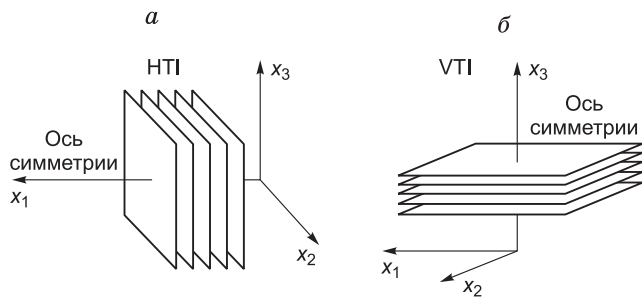


Рис. 1. Трансверсально-изотропные модели НТИ (а) и VTI (б) сред с параллельными трещинами в изотропной вмещающей их среде.

Обращая матрицу податливости (7), получаем матрицу жесткости $\mathbf{C}^{\text{НТИ}}$ для среды НТИ-симметрии с горизонтальной осью x_1 , перпендикулярной к плоскостям вертикальных трещин:

$$\mathbf{C}^{\text{НТИ}} = (\mathbf{S}^{\text{НТИ}})^{-1} = \begin{pmatrix} M(1 - \Delta_N) & \lambda(1 - \Delta_N) & \lambda(1 - \Delta_N) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(1 - \Delta_N) & M(1 - r^2\Delta_N) & \lambda(1 - r\Delta_N) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(1 - \Delta_N) & \lambda(1 - r\Delta_N) & M(1 - r^2\Delta_N) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(1 - \Delta_T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(1 - \Delta_T) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $M = \lambda + 2\mu$, $r = \frac{\lambda}{M} \equiv \frac{\nu}{1 - \nu}$, $0 \leq \Delta_T = \frac{Z_T\mu}{1 + Z_T\mu} < 1$, $0 \leq \Delta_N = \frac{Z_N M}{1 + Z_N M} < 1$.

Безразмерные величины Δ_N и Δ_T названы ослабленностями трещин, нормальной и касательной [Bakulin et al., 2000a]. Заметим, что из вида матрицы (9) следует, что матрица жесткости среды LS TI полностью определяется четырьмя параметрами (λ , μ , Δ_N , Δ_T).

Ограничения на элементы матрицы $\mathbf{C}^{\text{НТИ}}$ следующие [Schoenberg, Sayers, 1995]:

$$c_{55} \leq c_{44}, \quad -c_{11} / 2 < c_{13} < c_{11} \leq c_{33}, \quad c_{11}c_{33} - c_{13}^2 = 2c_{44}(c_{11} + c_{13})$$

и $0 < c_{13} < c_{11} \leq c_{33}$ при $\nu > 0$. Здесь особое внимание следует обратить на квадратное уравнение

$$c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{44}(c_{11} + c_{13}) = 0 \quad (10)$$

относительно c_{13} , позволяющее находить эту, пятую, константу среды НТИ по остальным константам среды LS НТИ. Таким образом, в модели LS TI матрица жесткостей \mathbf{C} содержит всего четыре независимых (диагональных) элемента: c_{11} , c_{33} , c_{44} и c_{66} , тогда как в общей модели трансверсально-изотропной среды (TI) их пять, потому что константа c_{13} является независимым элементом этой матрицы.

Знание всех пяти элементов матрицы \mathbf{C} необходимо для вычисления скоростей распространения упругих волн трех типов (P , SV , SH) по произвольным направлениям в трансверсально-изотропной среде; однако в модели LS для этого предлагается использовать всего лишь четыре диагональных элемента, являющихся функциями констант λ , μ , Δ_N , Δ_T . В TI-среде (не LS TI) этих четырех диагональных элементов матрицы \mathbf{C} достаточно только для расчета скоростей вдоль оси симметрии бесконечного порядка (поперек трещин) и в плоскости изотропии (в плоскости трещин), т. е. при углах падения волны 0 и 90° .

Модель LS VTI. Это модель с горизонтальными трещинами, т. е. нормаль к плоскостям трещин направлена теперь по вертикальной оси x_3 : $\mathbf{n}^{\text{VTI}} = (0, 0, 1)$. В этом случае мы имеем дело с анизотропной средой симметрии VTI (см. рис. 1, б). Тогда, действуя так же, как при получении матрицы податливости $\mathbf{S}^{\text{НТИ}}$, найдем матрицу податливости \mathbf{S}^{VTI} . Она имеет следующий вид:

$$\mathbf{S}^{\text{VTI}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} & \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} + Z_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} + Z_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} + Z_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Обращая матрицу податливости \mathbf{S}^{VTI} (11), получим матрицу жесткости \mathbf{C}^{VTI} :

$$\mathbf{C}^{\text{VTI}} = (\mathbf{S}^{\text{VTI}})^{-1} = \begin{pmatrix} M(1 - r^2\Delta_N) & \lambda(1 - r\Delta_N) & \lambda(1 - \Delta_N) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(1 - r\Delta_N) & M(1 - r^2\Delta_N) & \lambda(1 - \Delta_N) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(1 - \Delta_N) & \lambda(1 - \Delta_N) & M(1 - \Delta_N) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(1 - \Delta_T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(1 - \Delta_T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $M = \lambda + 2\mu$, $r = \lambda / M$, $\Delta_N = \frac{Z_N M}{1 + Z_N M}$, $\Delta_T = \frac{Z_T \mu}{1 + Z_T \mu}$.

Уравнение относительно c_{13} , аналогичное (10), теперь такое [Hsu, Schoenberg, 1993]:

$$c_{11}c_{33} - c_{13}^2 - 2c_{66}(c_{33} + c_{13}) = 0. \quad (13)$$

Модели НТИ, VTI: нахождение c_{13} . Ограничения на константу c_{13} в моделях LS НТИ и LS VTI, уравнения (10) и (13), по своей структуре идентичны. Для удобства сравнения запишем их рядом в виде квадратных уравнений относительно c_{13} , снабдив индексами моделей:

$$(c_{13}^{\text{НТИ}})^2 + 2c_{44}^{\text{НТИ}}c_{13}^{\text{НТИ}} + c_{11}^{\text{НТИ}}(2c_{44}^{\text{НТИ}} - c_{33}^{\text{НТИ}}) = 0,$$

$$(c_{13}^{\text{VTI}})^2 + 2c_{66}^{\text{VTI}}c_{13}^{\text{VTI}} + c_{33}^{\text{VTI}}(2c_{66}^{\text{VTI}} - c_{11}^{\text{VTI}}) = 0.$$

Решения этих уравнений ($c_{13} > 0$) также имеют аналогичный вид:

$$\text{НТИ: } c_{13} = \sqrt{c_{44}^2 - c_{11}(2c_{44} - c_{33})} - c_{44};$$

$$\text{VTI: } c_{13} = \sqrt{c_{66}^2 - c_{33}(2c_{66} - c_{11})} - c_{66}. \quad (14)$$

Это сразу видно, если записать c_{ii} , диагональные компоненты матриц \mathbf{C} с индексами, указывающими тип волны (P , SH) и направление распространения (“ \perp ” – перпендикулярно плоскости изотропии (плоскости трещин), “ \parallel ” – параллельно плоскости изотропии):

$$\text{НТИ, VTI: } c_{13} = \sqrt{c_{SH,\parallel}^2 - c_{P,\perp}(2c_{SH,\parallel} - c_{P,\parallel})} - c_{SH,\parallel} \quad (15)$$

и тогда $c_{SH,\parallel} = \rho V_{SH,\parallel}^2$, $c_{P,\perp} = \rho V_{P,\perp}^2$, $c_{P,\parallel} = \rho V_{P,\parallel}^2$.

АНАЛИЗ УСЛОВИЯ-ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОНСТАНТУ c_{13} В МОДЕЛИ LS TI

Проследим с самого начала откуда и как появляются условия-ограничения на константу c_{13} в урав-

нениях (10), (13), из которых находится эта пятая, зависимая, компонента матриц жесткости сред НТИ (9) и VTI (12).

Образованию матриц жесткости $\mathbf{C}^{\text{НТИ}}$ и \mathbf{C}^{VTI} предшествует процесс формирования соответствующих матриц податливости $\mathbf{S}^{\text{НТИ}}$ и \mathbf{S}^{VTI} . Эти матрицы представляют собой суммы матриц податливости \mathbf{S}^{iso} изотропной среды и матриц податливости параллельных трещин \mathbf{S}^{fr} ($\mathbf{S}^{\text{fr},H}$ – вертикальных, $\mathbf{S}^{\text{fr},V}$ – горизонтальных, см. рис. 1). Схематически построение матриц податливостей $\mathbf{S}^{\text{НТИ}}$, \mathbf{S}^{VTI} изображено на рис. 2.

Приведенные на рис. 2 схемы наглядно показывают, что равенство недиагональных элементов в результирующей матрице \mathbf{S} для модели LS ($s_{13} = s_{23}$ в модели LS НТИ и $s_{13} = s_{12}$ в LS VTI) унаследовано от матрицы \mathbf{S}^{iso} изотропной среды, в которую затем вводятся податливости трещин Z_N и Z_T (но лишь в ее диагональные элементы). В матрице \mathbf{S}^{iso} все недиагональные элементы верхней подматрицы 3×3 одинаковы: $s_{12} = s_{23} = s_{13} = s_p - s_s / 2$, и поэтому эти элементы будут такими же и в результирующей матрице \mathbf{S} для модели LS. Здесь мы использовали аналогичные обобщенные обозначения, s_p и s_s , как в уравнении (15), т. е.: $s_p \equiv s_{11} = s_{22} = s_{33} = (\lambda + \mu) / [\mu(3\lambda + 2\mu)] = 1 / E$, и $s_s \equiv s_{44} = s_{55} = s_{66} = 1 / \mu$; заметим, что недиагональные элементы матрицы податливости \mathbf{S}^{iso} проще выражаются через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν : $s_{12} = s_{23} = s_{13} = -E/\nu$. Здесь важно то, что равенства $s_{13} = s_{23}$ (LS НТИ) и $s_{13} = s_{12}$ (LS VTI) служат ограничениями для модели LS, тогда как в обычной трансверсально-изотропной среде (НТИ и VTI) они не выполняются.

При переходе от матриц податливости \mathbf{S}^{VTI} , $\mathbf{S}^{\text{НТИ}}$ к обратным им матрицам жесткости \mathbf{C}^{VTI} , $\mathbf{C}^{\text{НТИ}}$ равен-

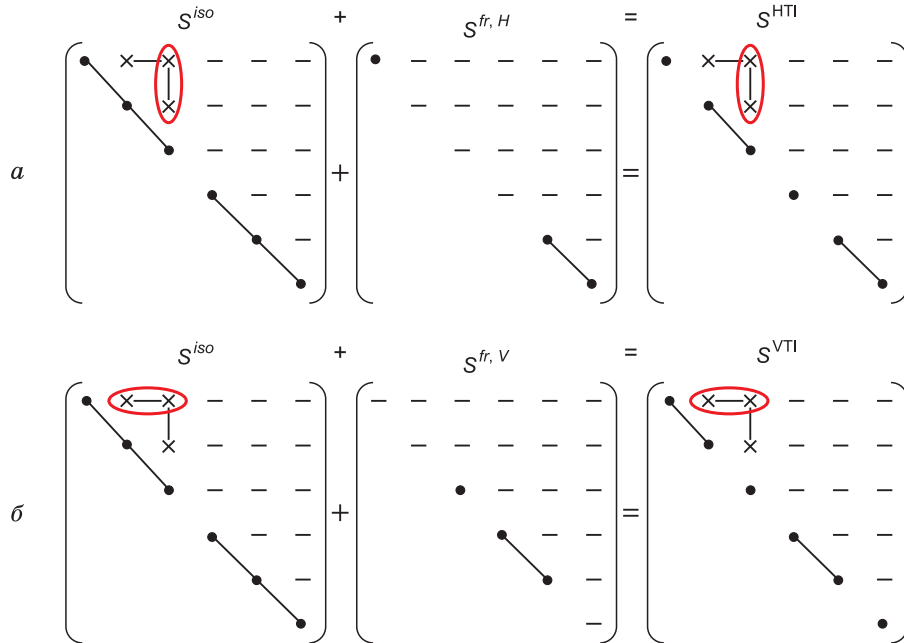


Рис. 2. Процесс формирования матриц податливости $\mathbf{S}^{\text{НТИ}}$ (а) и \mathbf{S}^{VTI} (б) в модели LS TI. Обозначения в матрицах: черные точки – независимые элементы, крестики – зависимые, черточки – нулевые; равные элементы соединены друг с другом. Овалами обведены равные друг другу элементы $s_{13} = s_{23}$ (LS НТИ) и $s_{13} = s_{12}$ (LS VTI); эти равенства служат ограничениями для модели LS, тогда как в обычной трансверсально-изотропной среде (НТИ и VTI) они не выполняются.

ства $s_{13} = s_{12}$ в S^{VTI} и $s_{13} = s_{23}$ в S^{HTI} переходят в следующие равенства

$$\text{VTI: } c_{11}c_{33} - c_{13}^2 = 2c_{66}(c_{33} + c_{13});$$

$$\text{HTI: } c_{11}c_{33} - c_{13}^2 = 2c_{44}(c_{11} + c_{13}),$$

которые являются условием-ограничением для модели Linear Slip. Рассматривая их как квадратные уравнения относительно c_{13} , находим их корни, выражения (14) для c_{13} , которые можно записать в виде единого выражения (15) для моделей VTI и HTI. Знание константы c_{13} необходимо для вычисления скоростей волн P и SV по произвольным направлениям распространения. Однако это выражение для c_{13} , уравнение (15), справедливо только в рамках модели Linear Slip, тогда как для "общей" модели трансверсально-изотропной среды (ТИ) оно может привести к неправильному результату при вычислении скоростей по произвольным направлениям распространения. Это объясняется тем, что это условие-ограничение на c_{13} для модели LS не соответствует реальности и к тому же противоречит физическому смыслу. Чтобы понять, в чем же состоит этот смысл, перейдем к выяснению физического смысла рассмотренных выше ключевых равенств $s_{13} = s_{23}$ в модели LS HTI и $s_{13} = s_{12}$ в модели LS VTI (см. рис. 2).

Для определенности займемся средой симметрии VTI. Матрица податливости S^{VTI} имеет вид [Sayers, 2010, 2013]

$$S^{VTI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В ней пять независимых параметров: два модуля Юнга, E_1 и E_3 , и три коэффициента Пуассона, ν_{12} , ν_{13} и ν_{31} . Модуль Юнга E_i соответствует одноосному напряжению и деформации по оси x_i , $i = 1, 3$, а коэффициент Пуассона ν_{ij} выражает отношение поперечной деформации вдоль оси x_j к осевой деформации по оси x_i в результате действия осевой нагрузки (напряжения) по оси x_i . В матрицу S^{VTI} входят два модуля сдвига μ_{ij} в плоскостях ij , которые выражаются через коэффициенты Пуассона ν_{ij} и модули Юнга E_i : $\mu_{13} = E_3/[2(1 + \nu_{31})]$, $\mu_{12} = E_1/[2(1 + \nu_{31})]$.

Из выражения (16) можно увидеть, что $s_{31} \neq s_{21}$: действительно, $s_{21} = -\nu_{12}/E_1$ и $s_{31} = -\nu_{13}/E_1$. В знаменателях этих выражений стоит один и тот же модуль Юнга (E_1), а в числителях – разные коэффициенты Пуассона. Так как эти коэффициенты Пуассона, ν_{12} и ν_{13} , не равны друг другу [Yan et al., 2013, 2015], то и элементы матрицы податливости s_{21} и s_{31} не равны. Из того что $s_{31} \neq s_{21}$ следует, что и в симметричной им паре (s_{12} , s_{13}) элементы матрицы не равны друг другу, $s_{13} \neq s_{12}$, что и требовалось доказать. Получается, что условие-ограничение Шонберга для модели Linear Slip,

$s_{13} = s_{12}$, не выполняется в общей модели трансверсально-изотропной среды (ТИ).

Превратим матрицу S^{iso} в матрицу $S^{LS VTI}$, действуя согласно схеме на рис. 2, б и/или уравнению (11). Введем податливости трещин Z_N , Z_T в диагональные элементы изотропной матрицы S^{iso} (Z_N в s_{33} , а Z_T в s_{44} и s_{55}). Получим

$$S^{LS VTI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} + Z_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} + Z_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} + Z_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix};$$

аналогичная матрица податливости S для среды LS HTI приведена в работе [Gray et al., 2012]. Изотропная матрица податливости S^{iso} в терминах модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν приведена, например, в работе [Thomsen, Ursin, 2010].

Теперь наша задача состоит в том, чтобы проверить, будет ли такая среда трансверсально-изотропной VTI, уравнение (16). Выпишем условия для модели VTI, чтобы она могла считаться моделью Linear Slip (LS VTI), $s_{13} = s_{12}$ и $s_{31} = s_{21}$:

$$s_{13} = s_{12} \rightarrow -\nu_{31}/E_3 = -\nu_{21}/E_1$$

$$\text{или } \nu_{31}/\nu_{21} = E_3/E_1,$$

$$s_{31} = s_{21} \rightarrow -\nu_{13}/E_1 = -\nu_{12}/E_1 \text{ или } \nu_{13} = \nu_{12}.$$

Рассмотрим равенства $\nu_{31}/\nu_{21} = E_3/E_1$ и $\nu_{13} = \nu_{12}$ с точки зрения их соответствия симметрии VTI. Проверка равенства $\nu_{31}/\nu_{21} = E_3/E_1$ сложнее, чем равенства $\nu_{13} = \nu_{12}$, так как требует рассмотрения напряжений вдоль осей вертикального и горизонтального цилиндров (рис. 3) и вызванных ими деформаций, тогда как для проверки равенства $\nu_{13} = \nu_{12}$ достаточно рассмотреть деформации, вызванные напряжением вдоль оси x_1 , в одном и том же цилиндре (горизонтальном). Этого будет достаточно, потому что, в силу симметрии матрицы податливости $s_{ji} = s_{ij}$, если выполняется $s_{31} = s_{21}$, то и равенство $s_{13} = s_{12}$ тоже будет справедливо.

Равенство $\nu_{13} = \nu_{12}$ означает, что сжимающее напряжение (рис. 4), приложенное по оси горизонтального цилиндра x_1 , приводит к одинаковой деформации (расширению) поперечного сечения цилиндра вдоль оси x_2 (вдоль плоскости напластования x_1x_2), и в перпендикулярном направлении, вдоль оси x_3 (поперек плоскости напластования). Но этого не может быть, так как податливости в среде ТИ не могут быть одинаковыми в плоскости изотропии (плоскости напластования) и по нормали к этой плоскости. Очевидно, что податливость в плоскости изотропии меньше, чем по нормали к ней, так как нормаль x_3 пересекает трещины, а направление x_2 принадлежит сплошной среде, без трещин. Ниже этот случай рассматривается более подробно.

На рис. 4 сравнивается деформирование цилиндрического образца (горизонтального цилиндра), содер-

жащего параллельные трещины, для двух случаев описания его анизотропии: моделей VTI и LS VTI. Автор модели LS VTI считал эту модель принадлежащей симметрии VTI, но при этом ставил дополнительное условие – равенство $s_{13} = s_{12}$ [Hsu, Schoenberg, 1993]. Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, так ли это.

Рассмотрим сжатие образца по направлению оси x_1 и его расширение в поперечном сечении по двум направлениям: оси x_3 , нормали к плоскости изотропии, и оси x_2 , находящейся в плоскости изотропии x_1x_2 (см. рис. 4, а). Коэффициент Пуассона ν , по определению, – отношение поперечной деформации (ε_r) к продольной (ε_a): $\nu = \varepsilon_r / \varepsilon_a$. Продольная деформация, вызванная одноосным напряжением по x_1 , одинакова для коэффициентов Пуассона ν_{13} и ν_{12} , а следовательно, и для элементов s_{31} и s_{21} матрицы податливости S^{VTI} , см. выражение (16). В знаменателях элементов s_{31} и s_{21} стоят одинаковые величины E_1 , значит не одинаковыми являются величины ν_{13} и ν_{12} в числителях, а именно поперечная деформация ε_r в направлении осей x_3 и x_2 . И это подтверждают рис. 4, б, в. На рис. 4, б изображено одинаковое расширение по осям x_3 и x_2 , как того требует модель LS TI, а на рис. 4, в показано истинное расширение образца по осям x_3 и x_2 , свойственное как самому образцу, так и его модели TI-симметрии. Видно, что расширение образца больше по оси x_3 , чем по оси x_2 , потому что податливость среды TI-симметрии за счет трещин больше по нормали к плоскостям трещин, вдоль оси x_3 , чем в плоскости трещин. Поэтому $\nu_{13} > \nu_{12}$ и, значит, $s_{31} > s_{21}$, а в силу симметрии $s_{ij} = s_{ji}$ неравенство $s_{13} > s_{12}$ также справедливо, см. матрицу (16) для среды VTI. Неравенство коэффициентов Пуассона $\nu_{13} > \nu_{12}$ в трансверсально-изотропных породах (например сланцах) и слоистых материалах (например графите) также подтверждено данными лабораторных измерений динамических и статических коэффициентов Пуассона [Yan et al., 2013, 2015].

Одинаковое расширение по направлениям x_3 и x_2 может быть в изотропной среде, откуда оно и привнесено в матрицы LS TI, как было показано на рис. 2. Поэтому равенства $s_{13} = s_{12}$ и $s_{31} = s_{21}$ справедливы только для изотропной среды, но не для трансверсально-изотропной. Кроме изотропии, они справедливы и для кубической симметрии, но в ней три независимых константы: s_{11}, s_{44} и s_{12} (т. е. $s_{11} = s_{22} = s_{33}$, $s_{44} = s_{55} = s_{66}$ и $s_{12} = s_{13} = s_{23}$), а не пять, как в TI-среде; однако, в отличие от модели LS, константа s_{13} – независимый элемент для кубической симметрии.

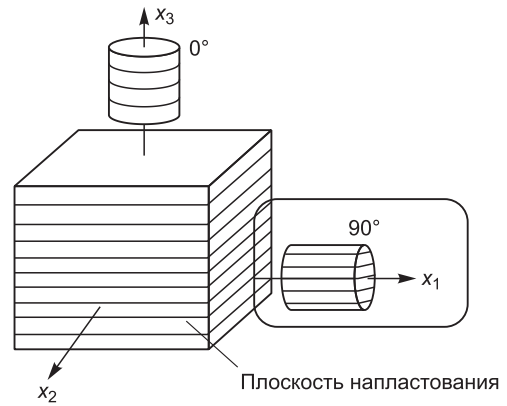
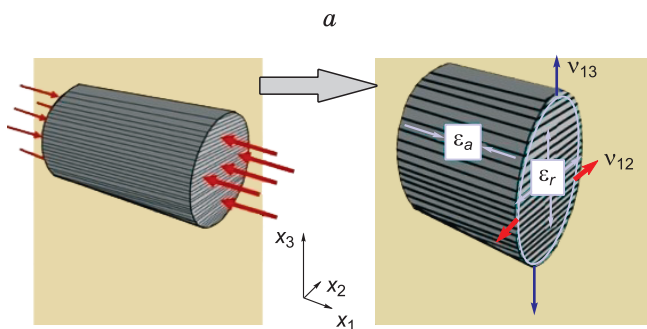


Рис. 3. Вертикальный и горизонтальный цилиндры, вырезанные из керна породы симметрии VTI. Ось вертикального цилиндра параллельна оси симметрии x_3 (0°), а ось горизонтального цилиндра x_1 (90°) находится в плоскости изотропии (плоскости напластования).

Невозможность выполнения равенства $\nu_{13} = \nu_{12}$ для компонент s_{31}, s_{21} в матрице (16) можно показать и путем выражения коэффициентов Пуассона ν_{13}, ν_{12} через жесткости c_{ij} . Эти выражения имеют вид [Yan et al., 2013, 2015]

$$\nu_{13} = \frac{2c_{13}c_{66}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}; \quad \nu_{12} = \frac{c_{33}(c_{11} - 2c_{66}) - c_{13}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}. \quad (17)$$

Их знаменатели равны, а числители не равны, и, следовательно, коэффициенты Пуассона ν_{13} и ν_{12} не равны. Допущение равенства $\nu_{13} = \nu_{12}$, а, значит, и $s_{13} = s_{12}$, принятое в модели LS VTI, означает выполнение равенства

$$2c_{13}c_{66} = c_{33}(c_{11} - 2c_{66}) - c_{13}^2, \quad (18)$$

которое получается в результате приравнивания числителей и сокращения равных знаменателей в выражениях (17) для коэффициентов Пуассона.

Это выражение мы выписывали выше, это равенство (13), указывая, что оно получено из равенства $s_{13} = s_{12}$ после обращения матрицы податливости: $(S^{LSVTI})^{-1} = C^{LSVTI}$. Теперь остается проанализировать решение

$$c_{13} = \sqrt{c_{66}^2 - c_{33}(2c_{66} - c_{11})} - c_{66} \quad (19)$$

уравнения (18) относительно c_{13} .

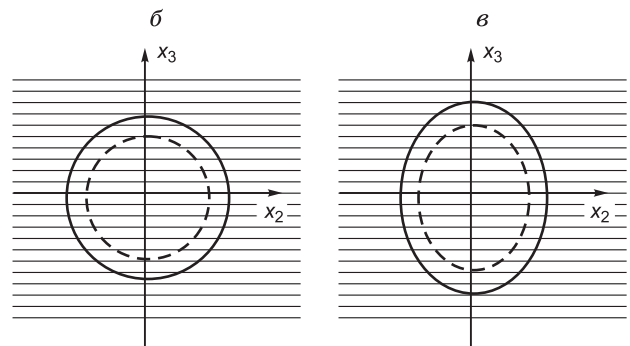


Рис. 4. Цилиндрический образец (“горизонтальный цилиндр”) породы с параллельными трещинами, сжимаемый по направлению оси x_1 (а). Поперечное сечение цилиндра плоскостью x_3x_2 : в модели LS VTI (б) и в модели VTI (в). Пунктиром показаны исходные сечения, сплошными линиями – сечения в результате расширения под действием сжимающего одноосного напряжения по оси x_1 .

Рассматривая условия-ограничения для c_{13} [Yan et al., 2013, 2015],

$$c_{13\min} < c_{13} < c_{13\max}, \quad (20)$$

где

$$c_{13\min} = \sqrt{c_{33}(c_{11} - 2c_{66}) + c_{66}^2} - c_{66},$$

$$c_{13\max} = \sqrt{c_{33}(c_{11} - 2c_{66})}, \quad (21)$$

мы увидели, что выражение (19) для c_{13} в модели VTI является нижней границей $c_{13\min}$ в неравенствах-ограничениях (20), (21). Для нас главное, что должно выполняться неравенство

$$c_{13} > \sqrt{c_{33}(c_{11} - 2c_{66}) + c_{66}^2} - c_{66},$$

но отнюдь не равенство (т. е. условие для модели LS)

$$c_{13} = \sqrt{c_{33}(c_{11} - 2c_{66}) + c_{66}^2} - c_{66}. \quad (22)$$

Тогда получается, что равенство (22) не имеет физического смысла, вернее оно противоречит физическому смыслу, а именно физически обоснованному соотношению между коэффициентами Пуассона, $\nu_{13} > \nu_{12}$. И не только оно, а и исходное условие-ограничение на s_{13} в модели LS VTI, $s_{13} = s_{12}$, из которого оно получено при переходе от матрицы \mathbf{S}^{VTI} к матрице \mathbf{C}^{VTI} : $\mathbf{C}^{\text{VTI}} = (\mathbf{S}^{\text{VTI}})^{-1}$. Об этом факте мы сообщили в докладах на конференциях EAGE и SEG [Чичина и др., 2015a; Chichinina et al., 2015].

В терминах сейсморазведки можно судить о месте модели LS VTI по отношению к моделям VTI общего вида, рассмотрев индикатрисы скоростей на рис. 5. Графики на рис. 5 построены по значениям жесткостей c_{33} , c_{11} , c_{44} и c_{66} , измеренным в ядрах пород по данным из работ: для сланцев [Sone, Zoback, 2013], песчаников и карбонатов [Thomsen, 1986; Johnston, Christensen, 1995; Jakobsen, Johansen, 2000; Wang, 2002]. Жесткость c_{13} рассчитывалась по формулам (21). Значения функций $V_P(\theta)$, $V_{SV}(\theta)$, удовлетворяющие неравенствам (20) для значений c_{13} , находятся внутри закрашенных областей. Границы областей не входят в области допустимых значений $V_P(\theta)$, $V_{SV}(\theta)$. Границы с надписью Linear Slip (LS VTI), показанные сплошной линией,

являются нижней границей $V_P(\theta)$ и верхней границей $V_{SV}(\theta)$; они построены при $c_{13} = c_{13\min}$. Точками нанесены границы областей при $c_{13} = c_{13\max}$. В дополнение дан график скорости волны SH, но поскольку она не зависит от c_{13} (неравенства-ограничения (20)), то ее индикатриса определяется однозначно.

Согласно неравенствам (20), (21), значения скоростей волн P , SV на границах допустимых областей не являются допустимыми. Для нас главное то, что нижняя граница скоростей P -волн и верхняя граница скоростей SV -волн, отвечающая условию-ограничению на c_{13} , означают недопустимые значения. Отсюда вывод: равенство (19) для c_{13} , строго говоря, нельзя использовать для расчета скоростей P - и SV -волн, распространяющихся по произвольным направлениям, т. е. отличным от $\theta = 0$ и 90° . Это серьезное ограничение для использования модели Linear Slip на практике. Тем не менее применение ее для описания распространения упругих волн в плоскости симметрии трансверсально-изотропной среды и по нормали к этой плоскости представляет собой довольно широкое поле деятельности. Если среда имеет орторомбическую симметрию, то и в этом случае модель Linear Slip применима к плоскостям симметрии этой среды со своими четырьмя упругими константами в каждой из трех плоскостей симметрии.

Модель Linear Slip оказывается применимой для произвольных направлений распространения P - и SV -волн в двух случаях: при нормальной ослабленности Δ_N , равной нулю ($\Delta_N = 0$), и при равенстве нормальной и касательной ослабленностей ($\Delta_N = \Delta_T$). В этих двух частных случаях выполняется условие-ограничение на константу c_{13} для модели LS, уравнение (13), т. е., если подставить в это уравнение константы c_{ij} , выраженные через Δ_N и Δ_T из уравнения для матрицы жесткости \mathbf{C}^{VTI} (12), то получится тождество.

Первый случай ($\Delta_N = 0$) может соответствовать флюидонасыщенным трещинам [Vakulin et al., 2000a]. Второй случай ($\Delta_N = \Delta_T$) – довольно экзотический, когда параметр анизотропии Томсена δ равен нулю, т.е. индикатриса скорости продольной волны имеет нулевую вторую производную в точке $\theta = 0^\circ$ (на рис. 5 этому случаю соответствует кривая скорости V_P с надписью “Linear Slip”).

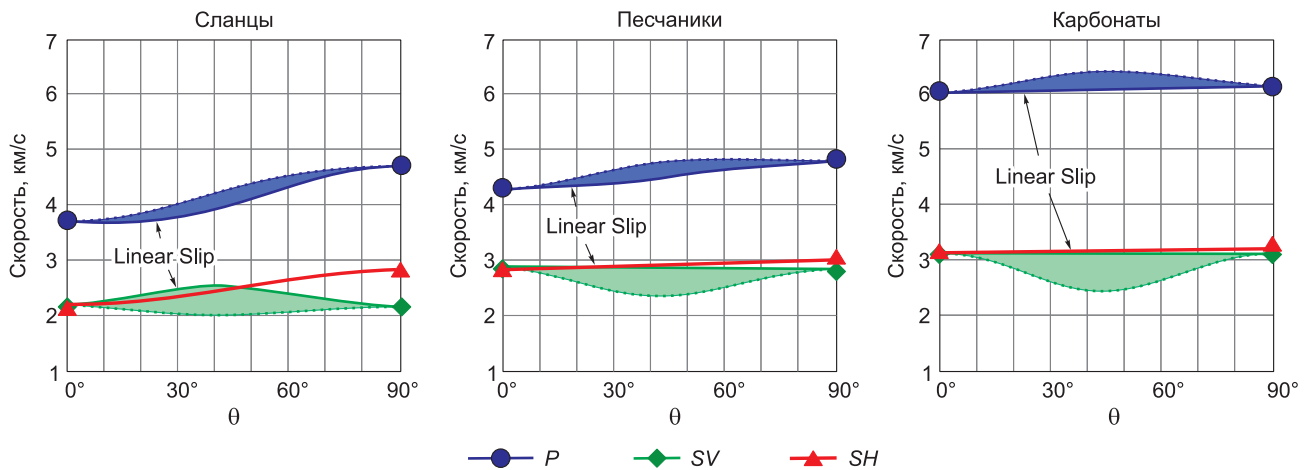


Рис. 5. Фазовые скорости $V_P(\theta)$, $V_{SV}(\theta)$ и $V_{SH}(\theta)$, где θ – угол между волновой нормалью \mathbf{n} и осью симметрии x_3 среды VTI ($\theta = 0^\circ$), для трех типов пород: сланцев, песчаников и карбонатов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В модели LS TI Шонберга упругие свойства среды с параллельными трещинами в изотропной вмещающей среде описываются матрицей жесткости \mathbf{C} с четырьмя независимыми элементами, в которые входят два параметра Ламе для изотропной среды и два параметра, нормальная и касательная ослабленности, для трещин. Недостающий пятый элемент матрицы \mathbf{C} , c_{13} , предложено находить как функцию независимых элементов c_{ij} , используя равенство, которое получено на основе равенства $s_{13} = s_{12}$ для матрицы податливости \mathbf{S} , обратной матрице жесткости \mathbf{C} . В свою очередь, матрица \mathbf{S} была получена путем сложения двух матриц: для изотропной среды и для трещин, при этом суммировались только диагональные элементы этих матриц, а недиагональные остались теми же, что в изотропной среде, так как для трещин недиагональные элементы – нулевые. Такой способ получения матрицы податливости \mathbf{S} изотропной среды с параллельными трещинами представляет собой реализацию метода, предложенного в статье [Schoenberg, Muir, 1989]. Мы видим, что в некоторых случаях при использовании этого метода есть подвох, который и привел к модели LS, нарушающей законы физики.

Следует отметить, что в заключительном разделе статьи [Schoenberg, Muir, 1989] высказывается сомнение насчет корректности применения разработанного метода расчета эффективных параметров (основанного на использовании матричной алгебры и теории групп) для среды с ориентированными трещинами, описываемой моделью LS. М. Schoenberg и F. Muir [1989] делают вывод, что существенная трудность в использовании ими теории групп в процессе построения модели LS состоит в том, что элементы группы не всегда адекватно отображаются обратно в стабильную однородную анизотропную среду в рамках рассматриваемой модели. Имеются примеры, когда разработанный метод расчета эффективных параметров в рамках модели LS приводит к нефизичным параметрам, таким как отрицательная плотность, или же возникает нестабильное, неоднозначное решение, например в расчете нормальной ослабленности Δ_N по данным скоростей.

М. Schoenberg, F. Muir [1989] отмечают, что модель LS трещиноватой среды лучше смотрится с математической точки зрения (в терминах теории групп), чем с практической (физической) точки зрения, так как трещины представлены довольно странно (в оригинале “somewhat awkwardly”) – слоями бесконечно тонкими и бесконечно мягкими. С другой стороны эффективность модели LS была подтверждена результатами физического моделирования с пластинчатой моделью (эксперимент, описанный в работе [Hsu, Schoenberg, 1993]). Этот эксперимент оказался единственным подтверждением осуществимости модели LS, так как опытные данные хорошо отвечали условно-ограничению для модели LS.

В заключение добавим, что в основе алгоритма построения модели LS лежит принцип сложения двух матриц податливости – изотропной среды и трещин, что приводит к нарушению принципа симметрии Кюри. Поясним это более подробно, для чего приведем формулировку принципа Кюри [Сиротин, Шаскольская, 1979, с. 179]: “Когда определенные причины

вызывают определенные следствия, то элементы симметрии причин должны проявляться в вызванных ими следствиях”.

В нашем случае “определенные причины” – это параллельные трещины в изотропной вмещающей среде, а “определенные следствия” – это физические явления, т. е. анизотропные упругие свойства трещиноватой среды, в которых должна проявляться трансверсально-изотропная симметрия изотропной среды с параллельными трещинами. Одно из физических следствий – это анизотропия скоростей P -, SV - и SH -волн, характерная для трансверсально-изотропной среды. Другое физическое следствие – это анизотропия механических свойств.

В модели Linear Slip мы вскрыли несоответствие между “причинами” и “следствиями”. Оно выражается в несоответствии индикатрис скоростей P - и SV -волн на неглавных направлениях (между $\theta = 0$ и 90°) среды с параллельными трещинами. Другое аналогичное несоответствие относится к геомеханическим характеристикам, под которыми мы понимаем коэффициенты Пуассона в трансверсально-изотропной породе, входящие в тензор податливости \mathbf{S} .

Модель Linear Slip описывается тензором податливости \mathbf{S} , искусственно введенным М. Шонбергом, который неадекватно описывает анизотропные механические упругие свойства; в частности, не соблюдается соотношение между анизотропными коэффициентами Пуассона $\nu_{13} > \nu_{12}$. Эти два коэффициента Пуассона ν_{13} и ν_{12} оказываются равными в модели LS, что противоречит трансверсально-изотропной симметрии самой среды и тензора податливости \mathbf{S} . Иначе говоря, в модели LS “элементы симметрии причин” не проявляются “в вызванных ими следствиях”. Принцип Кюри не выполняется в рамках модели Linear Slip из-за искусственно введенного тензора податливости \mathbf{S} , а в результате и полученный из него тензор упругих модулей \mathbf{C} с четырьмя независимыми константами (вместо положенных пяти) оказывается не удовлетворяющим принципу Кюри. Таким образом, если следовать принципу симметрии Кюри (а не следовать ему нельзя, потому что это универсальный принцип, определяющий влияние симметрии на все физические явления), то модель LS TI надо превратить в модель TI с пятью независимыми элементами, считая c_{13} независимым элементом.

Целью настоящей работы было обратить внимание на то, что модель LS следует применять с большой осторожностью, особенно когда по данным измерений скоростей определяются параметры трещиноватой среды, такие как плотность трещин (интенсивность трещиноватости), характер флюидозаполнения (“сухие” или флюидо-насыщенные трещины [Bakulin et al., 2000a]). Это связано с тем, что в эти параметры входит нормальная ослабленность трещин Δ_N , для определения которой необходима истинная константа c_{13} . Применение формулы Шонберга для расчета c_{13} влечет за собой ошибки в определении константы c_{13} , а значит и в определении всех атрибутов сейсморазведки и геомеханики, куда входит эта константа, таких, как например, параметр Томсена δ , нормальная податливость трещин Z_N и минимальное горизонтальное напряжение σ_{h_min} [Gray et al., 2012]. Это является предметом наших дальнейших исследований.

Литература

- Айзенберг А.М., Клем-Мусатов К.Д., Ланда Е.И.** Модель анизотропной сейсмической среды // Сейсмические волны в сложнопостроенных средах. Новосибирск: Наука, 1974. С. 64–110.
- Бакулин А.В., Молотков Л.А.** Эффективные сейсмические модели трещиноватых и пористых сред. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 144 с.
- Баяк И.О.** Междисциплинарный подход к определению эффективных физических свойств коллекторов // Технологии сейсморазведки. 2011. № 4. С. 75–82.
- Баяк И.О.** Междисциплинарный подход к прогнозированию макроскопических и фильтрационно-емкостных свойств коллекторов углеводородов: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Ин-т физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, 2013. 48 с.
- Баяк И.О., Дьяур Н.И.** Восстановление тензора упругости глинистых сланцев по ограниченному набору измеренных скоростей с использованием теории эффективных сред // Технологии сейсморазведки. 2012. № 4. С. 15–21.
- Баяк И.О., Рыжков В.И.** Определение параметров трещин и пор карбонатных коллекторов по данным волнового акустического каротажа // Технологии сейсморазведки. 2010. № 3. С. 32–42.
- Баяк И.О., Постникова О.В., Рыжков В.И., Иванов И.С.** Математическое моделирование анизотропных эффективных упругих свойств карбонатных коллекторов сложного строения // Технологии сейсморазведки. 2012. № 3. С. 42–55.
- Клем-Мусатов К.Д., Оболенцева И.Р., Айзенберг А.М.** Расчет полей упругих волн для одной модели анизотропной среды // Динамические характеристики сейсмических волн. Новосибирск: Наука, 1973. С. 73–98.
- Оболенцева И.Р., Чичинина Т.И.** 50 лет исследований сейсмической анизотропии в России // Геология и геофизика. 2010. Т. 51. С. 1452–1470.
- Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.** Основы кристаллофизики. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 640 с.
- Чичинина Т.И., Оболенцева И.Р., Дугаров Г.А.** О применимости эффективных анизотропных моделей трещиноватых сред в сейсморазведке // 77-я Международная конференция EAGE “Геомодель 2015” (7–10 сентября 2015 г.). Геленджик, 2015а.
- Чичинина Т.И., Оболенцева И.Р., Дугаров Г.А.** Пример построения эффективных анизотропных моделей трещиноватых сред для нефтегазоносных сланцев // 77-я Международная конференция EAGE “Геомодель 2015” (7–10 сентября 2015 г.). Геленджик, 2015б.
- Чичинина Т.И., Сабинин В.И., Ронкийо-Харийо Х., Оболенцева И.Р.** Метод QVOA для поиска трещиноватых коллекторов // Геология и геофизика. 2006. Т. 47, № 2. С. 265–283.
- Bakulin A., Grechka V., Tsvankin I.** Estimation of fracture parameters from reflection seismic data – Part I: HTI model due to a single fracture set // Geophysics. 2000a. V. 65. P. 1788–1802.
- Bakulin A., Grechka V., Tsvankin I.** Estimation of fracture parameters from reflection seismic data – Part II: Fractured models with orthorhombic symmetry // Geophysics. 2000b. V. 65. P. 1803–1817.
- Bakulin A., Grechka V., Tsvankin I.** Estimation of fracture parameters from reflection seismic data – Part III: Fractured models with monoclinic symmetry // Geophysics. 2000c. V. 65. P. 1818–1830.
- Carcione J.M., Gurevich B., Santos J.E., Picotti S.** Angular and frequency-dependent wave velocity and attenuation in fractured porous media // Pure and Appl. Geophys. 2013. V. 170, N 11. P. 1673–1683.
- Carcione J.M., Picotti S., Santos J.E.** Numerical experiments of fracture-induced anisotropy and attenuation anisotropy // Geophys. J. Int. 2012a. V. 191. P. 1179–1191.
- Carcione J.M., Santos J.E., Picotti S.** Fracture-Induced Anisotropic Attenuation // Rock Mech. and Rock Eng. 2012b. V. 45. P. 929–942.
- Chapman M.** Frequency-dependent anisotropy due to meso-scale fractures in the presence of equant porosity // Geophys. Prosp. 2003. V. 51. P. 369–379.
- Chapman M.** Modeling the effect of multiple sets of mesoscale fractures in porous rock on frequency-dependent anisotropy // Geophysics. 2009. V. 74. P. D97–D103.
- Chesnokov E., Bayuk I., Ammerman M.** Determination of shale stiffness tensor from standard logs // Geophys. Prosp. 2010. V. 58. P. 1063–1082.
- Chesnokov E., Tiwary D.K., Bayuk I., Sparkman M., Brown R.** Mathematical modeling of anisotropy of illite-rich shale // Geophys. J. Int. 2009. V. 178. P. 1625–1648.
- Chichinina T.I., Obolentseva I.R., Dugarov G.A.** Effective-medium anisotropic models of fractured rocks of TI symmetry: analysis of constraints and limitations in Linear Slip model // 85th SEG Ann. Int. Mtg. New Orleans, USA. Expanded Abstracts. 2015. P. 421–426.
- Chichinina T.I., Obolentseva I.R., Gik L., Bobrov B., Ronquillo-Jarillo G.** Attenuation anisotropy in the linear-slip model: Interpretation of physical modeling data // Geophysics. 2009a. V. 74, N 5. P. WB165–WB176.
- Chichinina T.I., Obolentseva I.R., Ronquillo-Jarillo G.** Anisotropy of seismic attenuation in fractured media: theory and ultrasonic experiment // Transport in Porous Media. 2009b. V. 79, N 1. P. 1–14.
- Chichinina T.I., Obolentseva I.R., Ronquillo-Jarillo G.** Generalization of Schoenberg’s linear-slip model to attenuative media: physical modeling versus theory // 79th SEG Ann. Int. Mtg. Houston, USA. Expanded Abstracts. 2009c. P. 3451–3457.
- Chichinina T.I., Obolentseva I.R., Ronquillo-Jarillo G., Sabinin V.I., Gik L.D., Bobrov B.A.** Attenuation anisotropy of P- and S-waves: Theory and laboratory experiment // J. Seism. Expl. 2007. V. 16. P. 235–264.
- Chichinina T.I., Sabinin V.I., Ronquillo-Jarillo G.** QVOA analysis: P-wave attenuation anisotropy for fracture characterization // Geophysics. 2006. V. 71. P. C37–C48.
- Gray D., Anderson P., Logel J., Delbecq F., Schmidt D., Schmid R.** Estimation of stress and geomechanical properties using 3D seismic data // First Break. 2012. V. 30. P. 59–68.
- Grechka V., Kachanov M.** Effective elasticity of fractured rocks // The Leading Edge. 2006. V. 25. P. 152–155.
- Gu B., Suárez-Rivera R., Nihei K.T., Myer L.R.** Incidence of plane waves upon a fracture // J. Geophys. Res. 1996. V. 101. P. 25337–25346.
- Gurevich B.** Elastic properties of saturated porous rocks with aligned fractures // J. App. Geophys. 2003. V. 54. P. 203–218.
- Gurevich B., Brajanovski M., Galvin R.J., Muller T.M., Toms-Stewart J.** P-wave dispersion and attenuation in fractured and porous reservoirs – poroelasticity approach // Geophys. Prosp. 2009. V. 57. P. 225–237.
- Hsu C.-J., Schoenberg M.** Elastic waves through a simulated fractured medium // Geophysics. 1993. V. 58. P. 964–977.
- Hudson J.A.** Overall properties of a cracked solid // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1980. V. 88. P. 371–384.
- Hudson J.A.** Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1981. V. 64. P. 133–150.

- Hudson J.A.** Seismic wave propagation through material containing partially saturated cracks // *Geophys. J.* 1988. V. 92. P. 33–37.
- Hudson J.A., Liu E., Crampin S.** The mechanical properties of materials with interconnected fractures and pores // *Geophys. J. Int.* 1996. V. 124. P. 105–112.
- Jakobsen M., Johansen T.A.** Anisotropic approximations for mudrocks: A seismic laboratory study // *Geophysics*. 2000. V. 65. P. 1711–1725.
- Johnston J.E., Christensen N.I.** Seismic anisotropy of shales // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100, N B4. P. 5991–6003.
- Kachanov M.** Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts // *Appl. Mech. Rev.* 1992. V. 45. P. 304–335.
- Kitsunezaki C.** Behavior of plane elastic waves across a plane crack // *J. Min. Coll. Akita Univ.* 1983. V. 6. P. 173–187.
- Pointer T., Liu E., Hudson J.A.** Seismic wave propagation in cracked porous media // *Geophys. J. Int.* 2000. V. 142. P. 199–231.
- Pyrak-Nolte L.J.** Fracture anisotropy: the role of fracture-stiffness gradients // *The Leading Edge*. 2007. V. 26, N 9. P. 1124–1127.
- Pyrak-Nolte L.J., Cook N.G.W.** Elastic interface waves along a fracture // *Geophys. Res. Lett.* 1987. V. 14, N 11. P. 1107–1110.
- Pyrak-Nolte L.J., Myer L.R., Cook N.J.W.** Transmission of seismic waves across single natural fractures // *J. Geophys. Res.* 1990a. V. 95, N B6. P. 8617–8638.
- Pyrak-Nolte L.J., Myer L.R., Cook N.J.W.** Anisotropy in seismic velocities and amplitudes from multiple parallel fractures // *J. Geophys. Res.* 1990b. V. 95, N B7. P. 11345–11358.
- Pyrak-Nolte L.J., Roy S., Mullenbach B.L.** Elastic interface waves along a fracture // *J. Appl. Geophys.* 1996. V. 35. P. 79–87.
- Sayers C.M.** Stress-dependent seismic anisotropy of shales // *Geophysics*. 1999. V. 64. P. 93–98.
- Sayers C.M.** The effect of low aspect ratio pores on the seismic anisotropy of shales // 78th SEG Ann. Int. Mtg. Las Vegas, USA. Expanded Abstracts. 2008. P. 2750–2754.
- Sayers C.M.** SEG/EAGE Distinguished Instructor Short Course. Geophysics Under Stress: Geomechanical Applications of Seismic and Borehole Acoustic Waves. 2010. P. 106–121.
- Sayers C.M.** The effect of anisotropy on the Young's moduli and Poisson's ratios of shales // *Geophys. Prosp.* 2013. V. 61. P. 416–426.
- Sayers C., Kachanov M.** A simple technique for finding effective elastic constants of cracked solids for arbitrary crack orientation statistics // *Int. J. Solids Struct.* 1991. V. 12. P. 81–97.
- Schoenberg M.** Elastic wave behavior across linear slip interfaces // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1980. V. 68, N 5. P. 1516–1521.
- Schoenberg M.** Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfacial slip // *Geophys. Prosp.* 1983. V. 31. P. 265–292.
- Schoenberg M., Douma J.** Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks // *Geophys. Prosp.* 1988. V. 36. P. 571–590.
- Schoenberg M., Muir F.** A calculus for finely layered anisotropic media // *Geophysics*. 1989. V. 54. P. 581–589.
- Schoenberg M., Sayers C.M.** Seismic anisotropy of fractured rock // *Geophysics*. 1995. V. 60, N 1. P. 204–211.
- Shao S., Pyrak-Nolte L.J.** Interface waves along fractures in anisotropic media // *Geophysics*. 2013. V. 78, N 4. P. T99–T112.
- Sone H., Zoback M.D.** Mechanical properties of shale-gas reservoir rocks – Part I: Static and dynamic elastic properties and anisotropy // *Geophysics*. 2013. V. 78. P. D381–D392.
- Thomsen L.** Weak elastic anisotropy // *Geophysics*. 1986. V. 51. P. 1954–1966.
- Thomsen L.** Elastic anisotropy due to aligned cracks in porous rock // *Geophys. Prosp.* 1995. V. 43. P. 805–830.
- Thomsen L.A., Ursin B.** Weakly Anisotropic Elastic Compliance // 72th EAGE Conference and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2010 (14–17 June 2010). Barcelona, Spain. 2010.
- Wang Z.** Seismic anisotropy in sedimentary rocks, part 2: Laboratory data // *Geophysics*. 2002. V. 57. P. 727–735.
- Yan F., Han D.H., Yao Q.** Physical constraints on c_{13} and Thomsen parameter delta for VTI rocks // 83th SEG Ann. Int. Mtg. Expanded Abstracts. Houston, USA. 2013. P. 2889–2894.
- Yan F., Han D.-H., Yao Q.** Physical constraints on c_{13} and δ for transversely isotropic hydrocarbon source rocks // *Geophys. Prosp.* 2015. [Article first published online: 27 July 2015], DOI: 10.1111/1365-2478.12265.

*Статья поступила в редакцию 18 ноября 2015 г.,
в окончательном варианте – 15 февраля 2016 г.*

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

ЧИЧИНИНА Татьяна Иннокентьевна – кандидат физико-математических наук; ранее научный сотрудник ИНГГ СО РАН, в настоящее время – сотрудник Мексиканского института нефти.
E-mail: tichqvoa@yahoo.com

ОБОЛЕНЦЕВА Ирина Романовна – доктор геолого-минералогических наук, главный научный сотрудник ИНГГ СО РАН.
E-mail: irobolentseva@ngs.ru

ДУГАРОВ Гэсэр Александрович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник ИНГГ СО РАН.
E-mail: geserdugarov@gmail.com