



РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ ЧЕРЕЗ НЕПЛОСКИЕ ГРАНИЦЫ

М.И. Протасов

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3, Россия, e-mail: protasovmi@ipgg.sbras.ru*

В данном исследовании представлен метод, направленный на преодоление некоторых ограничений стандартного трассирования Гауссовых пучков в средах с сильно контрастными границами сложной формы. Алгоритм основан на локальном сглаживании границ. Весами сглаживания являются сами Гауссовы пучки. Предлагаемой процедурой описываются их кинематика и динамика, качество которых сопоставимо с получаемым при использовании конечно-разностных методов высокой точности. Сравнительный анализ полученных результатов выявил ряд преимуществ предлагаемого метода.

Эффективное решение, Гауссовы пучки, негладкие границы

GAUSSIAN BEAM PROPAGATION THROUGH IRREGULAR INTERFACES

M.I. Protasov

*Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS,
Acad. Koptuyug prosp., 3, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: protasovmi@ipgg.sbras.ru*

In this study, a method to overcome some limitations of high-frequency beams propagation based on ray tracing in complex velocity models with irregular interfaces is presented and discussed. The method is based on local smoothing of the interface. The method captures the wave kinematics and dynamics that are comparable to finite-difference wave propagation with higher fidelity while staying within the ray-tracing framework, without requiring processing or alteration to the original model. In the paper comparison of the method with finite-difference wave propagation by numerical simulations is presented.

Effective solution, Gaussian beam, non-smooth interface

ВВЕДЕНИЕ

Лучевая теория имеет ограничения на применение в сложноустроенных средах (см. [Бабич, Болдырев, 1972; Ben-Menahem, Beydoun, 1986]). В частности, в геологических средах, содержащих соляные интрузии сложной формы, проблемы возникают на высококонтрастных границах соляных тел, которые зачастую имеют причудливую, сильно нерегулярную форму. С одной стороны, здесь возникает проблема неустойчивого численного решения для трассировки лучей, а с другой — присутствуют фундаментальные ограничения лучевого метода, связанные с предположением о высокочастотном характере рассматриваемых волновых процессов.

Было несколько попыток получить решения для волн с ограниченным диапазоном частот, оставаясь при этом в рамках схемы трассирования лучей. Так, в работе В. Biondi [1992] для этих целей используется приближение к уравнению Гельмгольца. При этом вводится в рассмотрение медленность, зависящая от частоты, с последующим применением стандартного лучевого трассирования. Основной недостаток данного подхода заключается в зависимости решения на низких частотах от решения на высоких частотах. Еще один способ учесть частотную зависимость волн — это частотно-зависимое трассирование лучей. В [Foreman, 1987] предложен способ «извлечения» частотно-зависимых лучей из решения уравнения Гельмгольца. Этот подход требует решения уравнения Гельмгольца, что связано с затратами вычислительных ресурсов, суще-

ственно превышающими необходимые для обычного трассирования лучей. В [Lomax, 1994] представлен альтернативный подход частотно-зависимого трассирования лучей, основанный на сглаживании в пределах длины волны. Этим методом осредняется скоростная модель в плоскости, перпендикулярной к лучу, с использованием весовой функции, ширина которой пропорциональна длине волны. Эта работа является первой попыткой учесть частотную зависимость волн внедрением частотной зависимости в трассирование лучей посредством усреднения. Теоретический анализ этого метода представлен позже в работе А. Lomax и R. Snieder [1996] и приводит к несколько иным весовым функциям, чем в работе А. Lomax [1994]. Однако ни в одном из исследований не рассматривается распространение волн через контрастные нерегулярные границы.

J.W.D. Nobro с соавторами предложили метод сглаживания нормали границы [2008], что позволяет выполнять устойчивую трассировку лучей, однако не преодолевает фундаментальных проблем лучевого метода. В [Protasov, Tcheverda, 2011] было предложено и обосновано частотно-зависимое трассирование лучей через нерегулярные границы раздела сред. Этот подход основан на использовании граничных интегралов, где на границе применяется сглаживание в интервале, зависящем от френелевского объема, который, в свою очередь, определяется частотой и углом падения луча на границу.

Наши исследования в этой области обусловлены необходимостью трассировки Гауссовых пучков при построении волновых сейсмических изображений (см. [Протасов, Чеверда, 2006; Protasov, Tcheverda, 2011, 2012]). Однако Гауссовы пучки – это не только сами лучи, но и их динамические параметры, которые также необходимо вычислять вдоль лучей. Они имеют еще более строгие ограничения на модель, чем сами лучи (см. [Ben-Menahem, Veudoun, 1986]). Для рассматриваемых сред основные особенности динамического трассирования связаны с кривизной границ (см. [Роров, 2002]).

В настоящей работе предлагается способ трассирования Гауссовых пучков через неплоские границы. Алгоритм основан на сглаживании границы в окрестности пересечения Гауссова пучка с ней, а весами сглаживания являются сами Гауссовы пучки. При таком подходе происходит локальное сглаживание самой границы, ее нормали и кривизны. Предлагаемая процедура протестирована конечно-разностным моделированием Гауссовых пучков на достаточно мелкой сетке.

ТЕОРИЯ И МЕТОД

Гауссовы пучки являются асимптотическими решениями уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 u_{gb}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{gb}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2(x, z)} \cdot u_{gb} = 0. \quad (1)$$

Явные формулы для Гауссовых пучков в лучевых координатах можно найти в [Роров, 2002]:

$$u_{gb}(s, q; \omega) = \sqrt{\frac{c_0(s, 0)Q(s_0)}{c_0(s_0, 0)Q(s)}} \cdot \exp\{i\omega\tau\} \cdot \exp\left\{\frac{i\omega}{2} \mathbf{G}(s)q^2\right\}, \quad (2)$$

где (s, q) – координаты текущей точки; $(s_0, 0)$ – координаты начальной точки луча; $\tau(s)$ – время пробега вдоль луча; c_0 – скорость. В матрице $\mathbf{G}(s) = P(s)Q(s)^{-1}$, где функции $P(s)$ и $Q(s)$ являются решением следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dQ}{ds} = c_0(s, 0)P; \quad Q(s_0) = Q_0; \quad (3)$$

$$\frac{dP}{ds} = \frac{-1}{c_0^2(s, 0)} \left(\frac{\partial^2 c_0}{\partial q^2} \right)_{q=0} Q; \quad P(s_0) = P_0. \quad (4)$$

Необходимо отметить, что матрица \mathbf{G} обладает положительной определенной мнимой частью. Поэтому амплитуда Гауссова пучка экспоненциально затухает при удалении от луча. Более детальное описание Гауссовых пучков можно найти в [Попов, 1983] или [Роров, 2002]. В этих работах проанализировано прохождение Гауссовых пучков через гладкие границы и при выполнении ряда ограничений на их изменчивость в окрестности точки падения получены соотношения, связывающие динамические параметры падающего Гауссова пучка u_{gb}^i , преломленного Гауссова пучка, u_{gb}^t и отраженного Гауссова пучка u_{gb}^r . Эти зависимости определяются как углом падения, так и кривизной границы. В частности, на границе, разделяющей два локально однородных слоя, эти соотношения для проходящего Гауссова пучка u_{gb}^i имеют следующий вид:

$$P^t = D \left(\frac{1}{c^t \cos \gamma^i} - \frac{1}{c^i \cos \gamma^t} \right) Q^i + \frac{\cos \gamma^i}{\cos \gamma^t} P^i; \quad (5)$$

$$Q^t = \frac{\cos \gamma^i}{\cos \gamma^t} Q^i, \quad (6)$$

где P^i, Q^i – динамические параметры падающего Гауссова пучка; P^t, Q^t – динамические параметры преломленного Гауссова пучка; $\gamma^i = a \cos(\mathbf{n}, \mathbf{t}_i)$ – угол падения; $\gamma^t = a \sin\left(\sin(\gamma^i) \frac{c^t}{c^i}\right)$ – угол преломления;

c^i, c^t – скорости в слоях по разные стороны границы; D – кривизна границы в точке падения луча. Основное влияние на динамические параметры проходящего пучка оказывают высокочастотный закон Снеллиуса и кривизна границы. Стоит отметить, что основные ограничения на применение Гауссовых пучков связаны именно с высокочастотным законом Снеллиуса и кривизной границы (см. [Ben-Menahem, Veudoun, 1986]).

В [Протасов, Осипов, 2014; Yarman et al., 2013] указано, что существует локальная эффективная граница, которая описывает прохождение физически корректных лучей через нерегулярные границы. Было показано, что эта граница зависит от направления падения, кривизны фронта и зоны Френеля, т. е. частоты. Формальное решение получается посредством локализации интеграла Кирхгофа. В настоящей статье рассматривается распространение Гауссовых пучков, которые уже локализованы в пространстве и содержат информацию о кривизне фронта, угле падения и зоне Френеля. Поэтому в данном случае уже не нужно проводить локализацию, в связи с чем предлагается локальное сглаживание границы, которое определяется самим падающим Гауссовым пучком:

$$x_{ef}(x^i, u_{gb}^i) = \frac{\int |u_{gb}^i(x^s; x^i; \omega)| \cdot x^s ds}{\int |u_{gb}^i(x^s; x^i; \omega)| ds}. \quad (7)$$

Аналогично происходит сглаживание нормали к границе:

$$\mathbf{n}_{ef}(x^i, u_{gb}^i) = \frac{\int |u_{gb}^i(x^s; x^i; \omega)| \cdot \mathbf{n}(x^s) ds}{\int |u_{gb}^i(x^s; x^i; \omega)| ds}. \quad (8)$$

Когда эффективная нормаль границы построена, определяется и эффективный угол падения, и эффективный угол прохождения посредством применения закона Снеллиуса для эффективной нормали («эффективный» закон Снеллиуса!):

$$\gamma_{ef}^i = a \cos(\mathbf{n}_{ef}, \mathbf{t}_i), \quad \gamma_{ef}^t = a \sin\left(\sin(\gamma_{ef}^i) \frac{c^t}{c^i}\right). \quad (9)$$

Однако это только кинематическая часть решения. Динамические свойства зависят от кривизны границы. Таким образом, чтобы посчитать динамические параметры, предлагается аналогично получить эффективную кривизну границы:

$$D_{ef}(x^i, u_{gb}^i) = \frac{\int |u_{gb}^i(x^s; x^i; \omega)| \cdot D(x^s) ds}{\int |u_{gb}^i(x^s; x^i; \omega)| ds}. \quad (10)$$

В конечном итоге получается *эффективная* локальная граница, которая описывается *эффективной* точкой падения, *эффективной* нормалью и *эффективной* кривизной (рис. 1). Окончательно эти величины используются для получения динамических параметров эффективного проходящего Гауссова пучка:

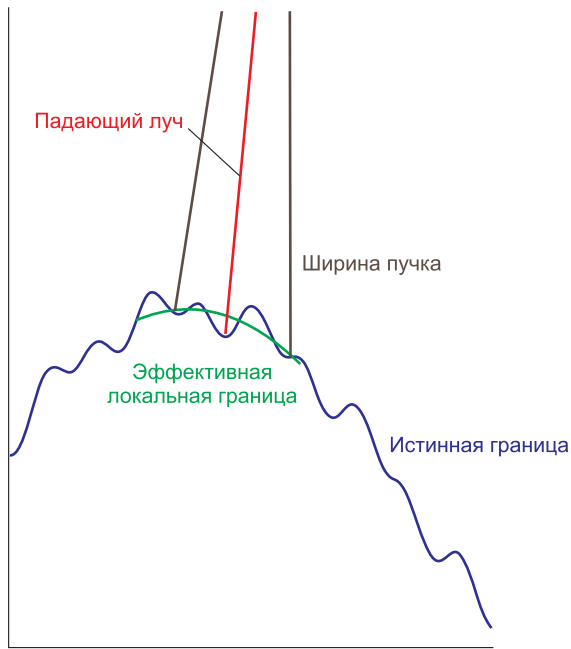


Рис. 1. Геометрия предлагаемого метода.

$$P_{ef}^i = D_{ef} \left(\frac{1}{c^i \cos \gamma_{ef}^i} - \frac{1}{c^i \cos \gamma_{ef}^t} \right) Q^i + \frac{\cos(\gamma_{ef}^i)}{\cos(\gamma_{ef}^t)} P^i; \quad (11)$$

$$Q_{ef}^i = \frac{\cos(\gamma_{ef}^t)}{\cos(\gamma_{ef}^i)} Q^i. \quad (12)$$

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Данный метод был апробирован на простейшей двухслойной модели и на синтетической модели Sigsbee2A. Результаты представленного алгоритма сравниваются с результатами стандартной высокочастотной аппроксимации и результатами конечно-разностного моделирования.

Двухслойная модель содержит осциллирующую границу, где скорость в верхнем слое равна 1500 м/с,

а в нижнем 4500 м/с, что соответствует скорости распространения волн в воде и в соли соответственно. Граница синусоидальна с амплитудой 150 м (две длины волны на 20 Гц в верхнем слое), а период варьируется от половины длины волны до 16 длин волн. На рис. 2, а; 3, а; 4, а представлены границы модели (красным), а также эффективные границы (синим) при вертикальном падении Гауссова пучка на частоте 20 Гц. На рис. 2, б; 3, б; 4, б снизу представлены кривизны истинных границ (красным) и кривизны эффективных границ (синим). Как видно из рис. 4, для быстро осциллирующей границы эффективная граница является практически плоской, а ее эффективная кривизна почти равна нулю. Таким образом, в этом случае граница слишком нерегулярна по сравнению с длиной волны и имеет очень большую кривизну. Но если изначально граница является более плавной, то и эффективная граница тоже довольно гладкая, как это видно на рис. 3. На рис. 2 представлен в каком-то смысле «предельный» случай: эффективная граница практически совпадает с исходной. Поэтому можно использовать высокочастотное приближение, что продемонстрировано на рис. 5. Остановимся на нем подробнее. На рис. 5, а приведен мгновенный снимок Гауссова пучка, моделируемого конечно-разностной схемой в модели с гладкой границей, а также эффективное решение: луч изображен желтым, а ширина Гауссова пучка красным цветами. На качественном уровне видно, что конечно-разностное решение имеет такую же ширину, как и соответствующее асимптотическое решение. На рис. 5, б представлены сейсмограмма Гауссова пучка, рассчитанного конечными разностями (красным), и сейсмограмма Гауссова пучка, полученная с использованием асимптотического решения (синим). Эти решения практически полностью совпадают: конечно-разностное, высокочастотное и эффективное решения. Таким образом в этой модели на данной частоте можно применять любой из методов.

Перейдем теперь к описанию численных экспериментов, выполненных для более сложной модели. На рис. 6, а представлен мгновенный снимок Гауссова пучка, моделируемого конечно-разностной схемой, на доминирующей частоте 20 Гц в модели с нерегулярной границей, а также представлено высокочастотное

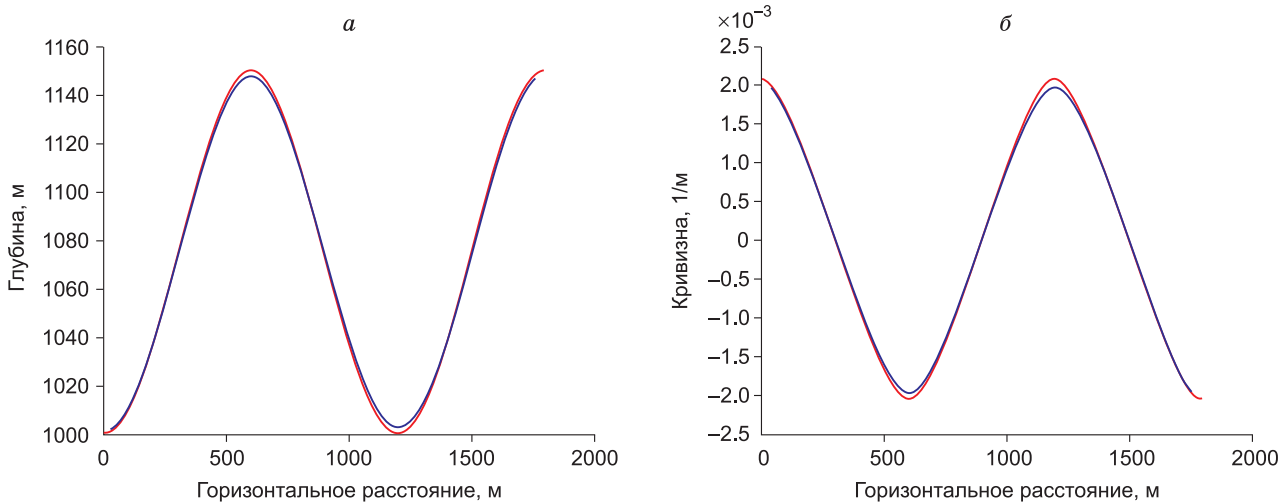


Рис. 2. Сравнение границ и кривизн: а – истинная граница (красным) и «эффективная» граница (синим) на частоте 20 Гц; б – кривизна истинной границы (красным) и кривизна «эффективной» границы (синим) на частоте 20 Гц.

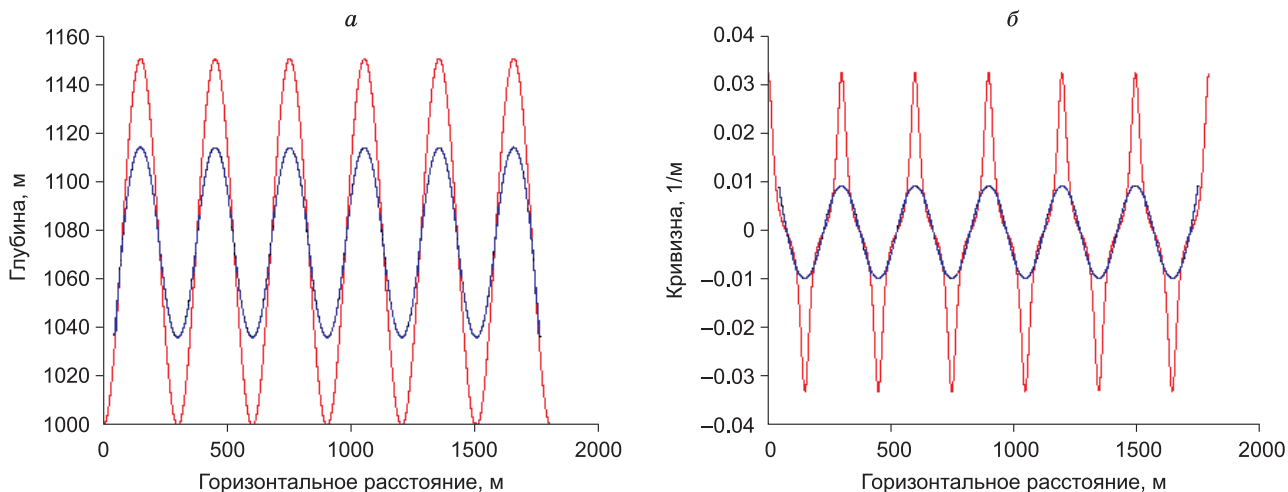


Рис. 3. Сравнение границ и кривизн:

a – истинная граница (красным) и «эффективная» граница (синим) на частоте 20 Гц; *б* – кривизна истинной границы (красным) и кривизна «эффективной» границы (синим) на частоте 20 Гц.

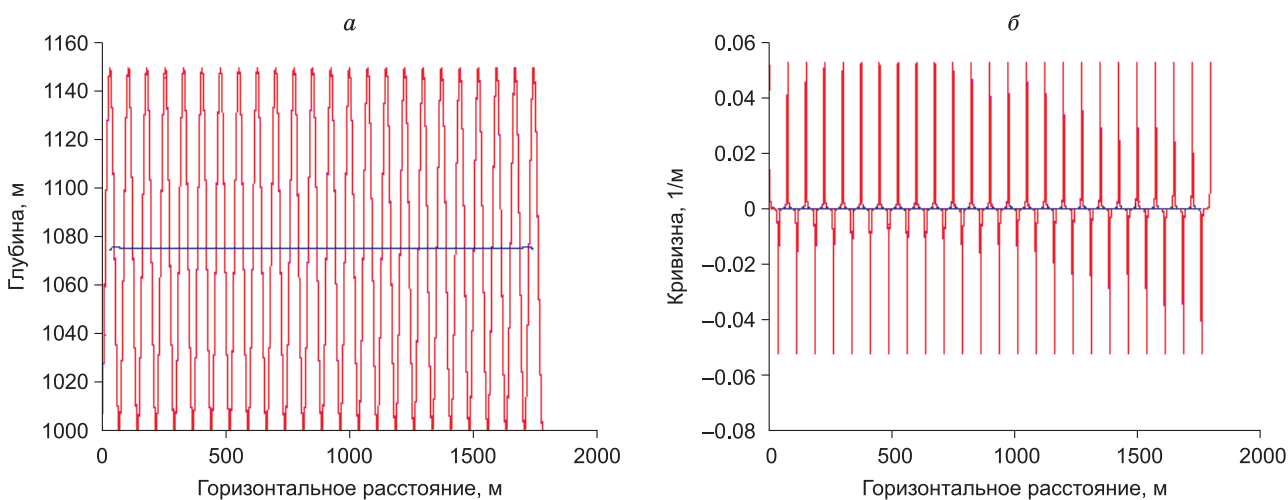


Рис. 4. Сравнение границ и кривизн:

a – истинная граница (красным) и «эффективная» граница (синим) на частоте 20 Гц; *б* – кривизна истинной границы (красным) и кривизна «эффективной» границы (синим) на частоте 20 Гц.

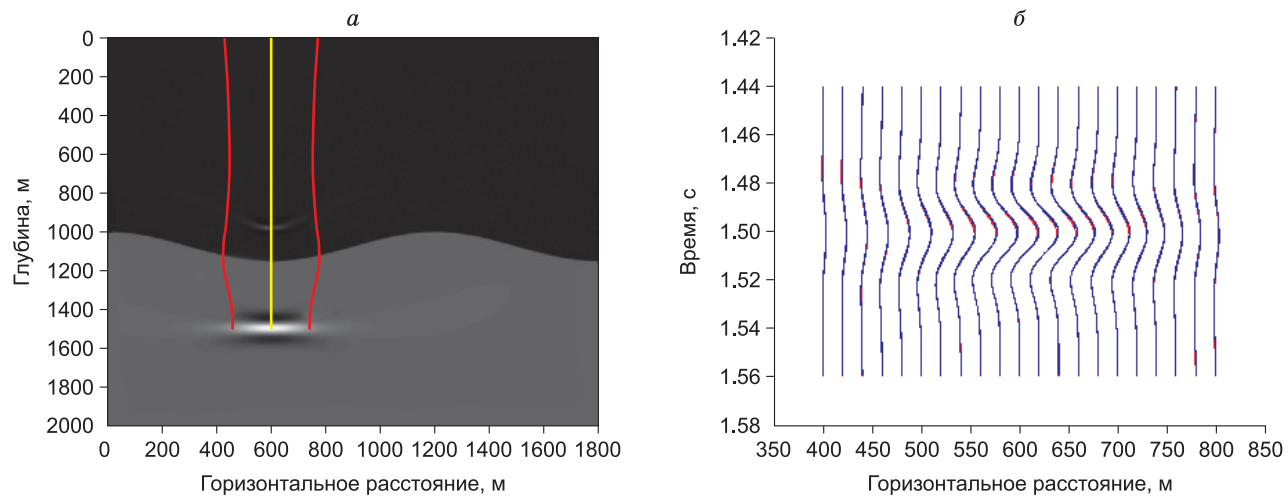


Рис. 5. Результаты для модели с гладкой границей:

a – луч (желтым) и ширина пучка (красным), а также мгновенный снимок Гауссова пучка, моделируемого конечно-разностной схемой; *б* – сейсмограмма Гауссова пучка, посчитанного конечными разностями (красным), и сейсмограмма Гауссова пучка, посчитанного лучевым приближением.

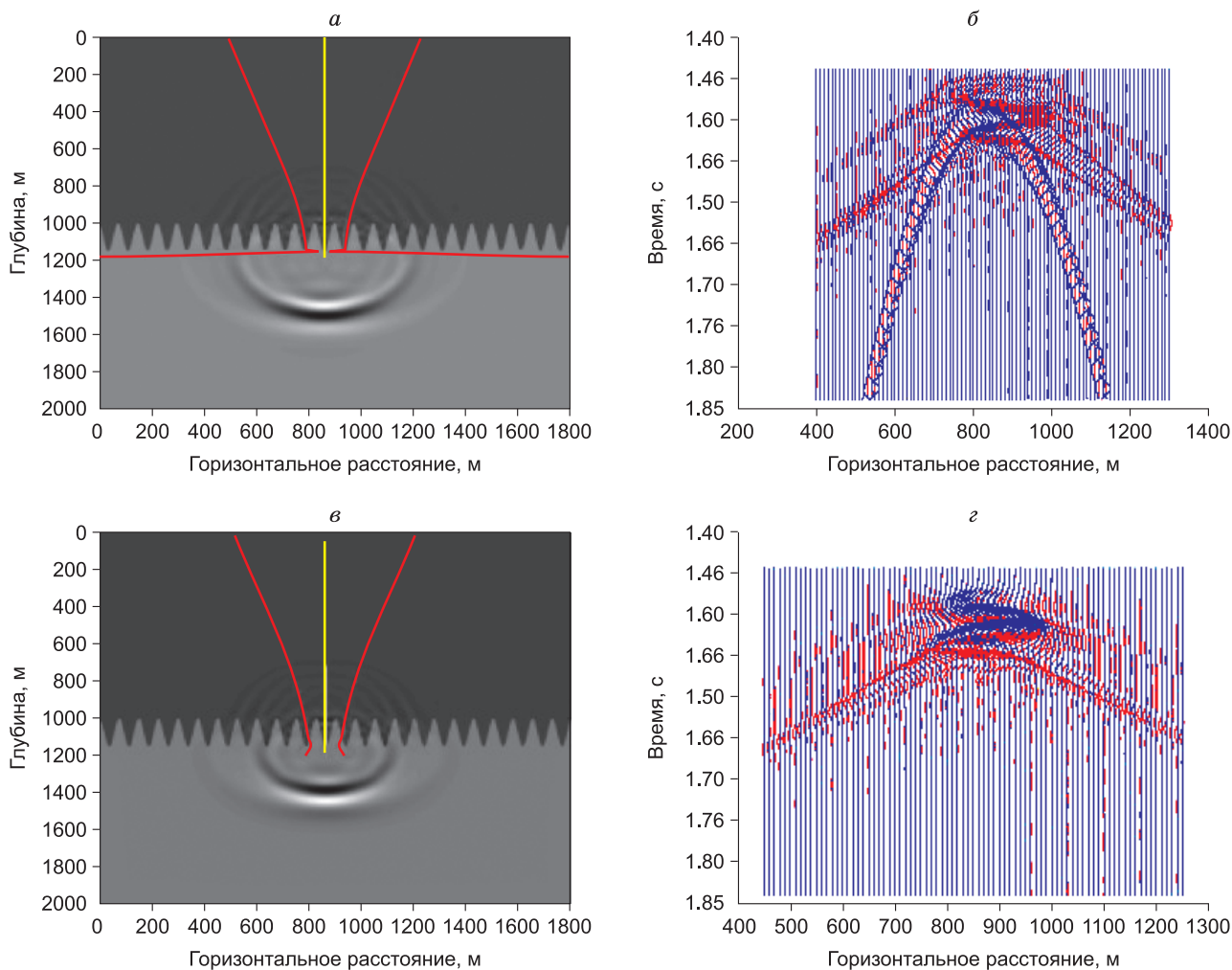


Рис. 6. Сравнение результатов на модели с шероховатой границей:

a, v — луч (желтым) и ширина пучка (красным), а также мгновенный снимок Гауссова пучка, моделируемого конечно-разностной схемой; *б, z* — сейсмограмма Гауссова пучка, посчитанного конечными разностями (красным), и сейсмограмма Гауссова пучка, посчитанного лучевым приближением; *a, б* — высокочастотное приближение; *v, z* — эффективное решение.

решение: луч отображен желтым, а ширина пучка красным. На рис. 6, б представлены сейсмограмма Гауссова пучка, рассчитанная конечными разностями (красным), и его сейсмограмма, полученная лучевым приближением (синим). Аналогичные расчеты представлены на рис. 6, в, z для разработанного эффективного решения. В обоих случаях высокочастотный проходящий луч и эффективный проходящий луч совпадают. Но динамические параметры отличаются существенным образом, что связано именно с кривизной границы. Как видно из сейсмограмм на рис. 6, высокочастотное приближение весьма далеко от конечно-разностного. В то же время в пределах ширины пучка эти решения довольно неплохо совпадают.

Более реалистичный пример представлен на модели Sigsbee2A, которая содержит соляное тело с сильно нерегулярной верхней границей. На рис. 7, а, б представлены мгновенные снимки Гауссова пучка, моделируемого конечно-разностной схемой, на доминирующей частоте 20 Гц в модели Sigsbee2A до прохождения верхней границы соли и после нее, а также приведено высокочастотное решение, причем

луч отображен желтым, а ширина пучка красным. Аналогичные расчеты представлены на рис. 7, в, z для разработанного эффективного решения. Кроме того, на всех снимках синим цветом обозначена линия, где конечно-разностное решение принимает максимальное значение. В идеальной ситуации она должна совпадать с лучом. Однако для высокочастотного решения эта линия весьма далека от луча, так же, как и ширина Гауссова пучка, рассчитанного в высокочастотном приближении, далека от конечно-разностного решения. В то же время луч, полученный как эффективное решение, практически совпадает с линией, где конечно-разностное решение принимает максимальное значение. А также видно, что и ширина эффективного Гауссова пучка весьма близка к ширине конечно-разностного аналога. Однако присутствуют различия, свидетельствующие о том, что не все эффекты могут быть корректно описаны данным методом. Но в целом приведенные результаты показывают, что эффективное решение можно использовать на такого рода моделях, тогда как высокочастотное приближение имеет гораздо большие ограничения на применение.

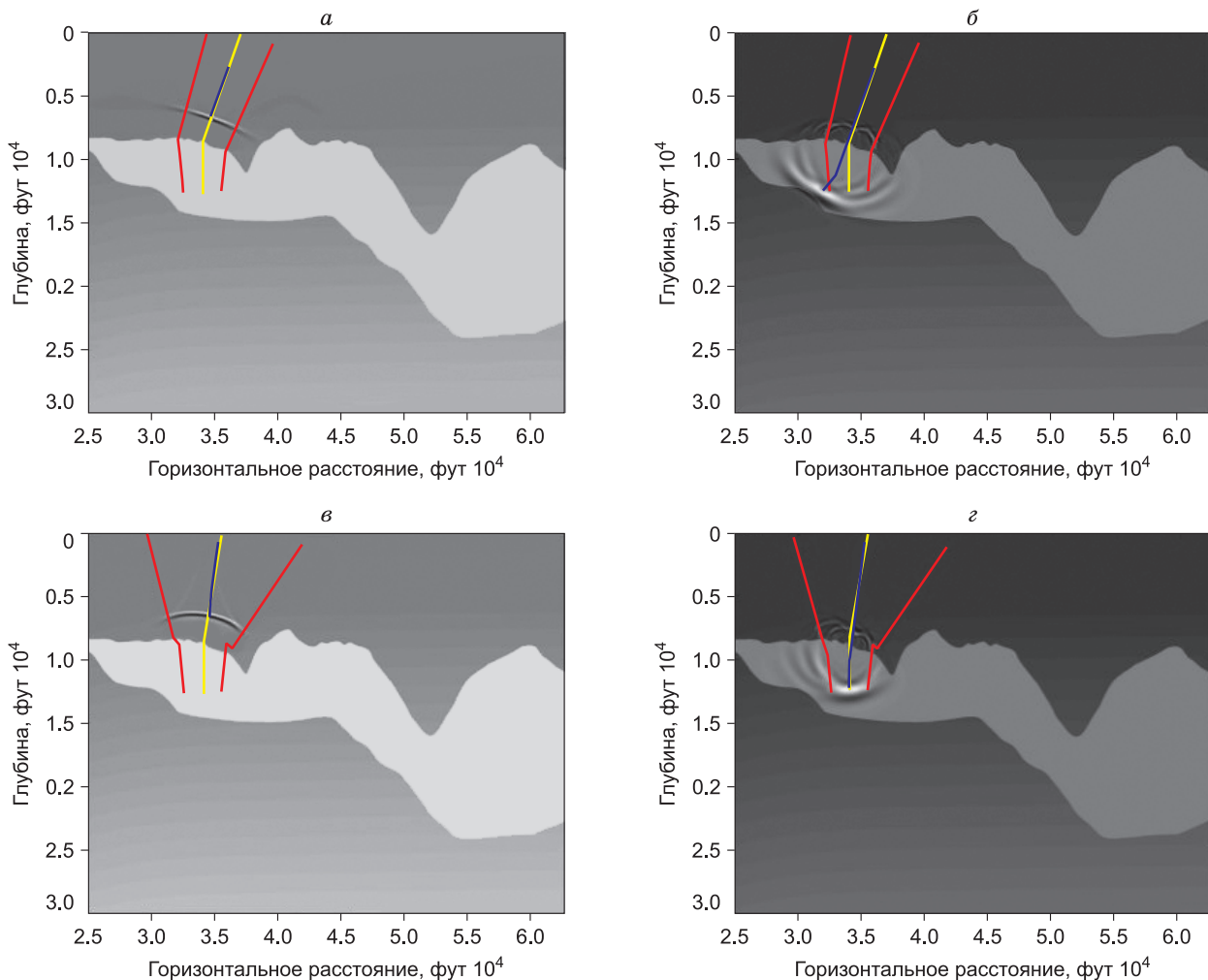


Рис. 7. Мгновенный снимок Гауссова пучка, моделируемого конечно-разностной схемой в модели Sigsbee, а также луч (желтым) и ширина пучка (красным):

a, б – высокочастотное приближение; *в, г* – эффективное решение; *a, в* – до прохождения соли; *б, г* – после прохождения верхней границы соли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе предложено и исследовано решение задачи прохождения Гауссовых пучков через нерегулярные границы. В результате его применения строятся эффективная граница, эффективная нормаль к границе, а также эффективная кривизна границы, которые зависят от Гауссова пучка, падающего на границу. Метод не требует существенных вычислительных ресурсов и устойчив по отношению к возмущению границы. Данный алгоритм корректно описывает физику прохождения Гауссовых пучков через контрастные нерегулярным границы. Однако и здесь учитываются далеко не все эффекты распространения волн. Исследование показало, что метод является перспективным для использования в приложениях, основанных на использовании Гауссовых пучков, например, в сейсмической миграции.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранты № 14-05-31257 и 16-05-00800, а также при поддержке президентского гранта МК-29.09.2014.5.

Литература

- Бабич В.М., Булдырев В.С.** Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
- Попов М.М.** Метод суммирования гауссовых пучков в изотропной теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. 1983. № 9. С. 39–50.
- Протасов М.И., Черверда В.А.** Построение сейсмических изображений в истинных амплитудах // Докл. Академии наук. 2006. Т. 407 (4). С. 528–532.
- Протасов М.И., Осипов К.С.** Частотно-зависимое лучевое трассирование для неплоских границ // Технологии сейсморазведки. 2014. № 3. С. 25–31.
- Ben-Menahem A., Beydoun W.** Range of validity of seismic ray and beam methods in general inhomogeneous media-I. General theory // Geophys. J. R. astr. Soc. 1985. V. 82. P. 207–234.
- Biondi B.** Solving the frequency dependent eikonal equation // 72nd SEG Ann. Int. Mtg. Expanded Abstracts. 1992. P. 1315–1319.
- Foreman T.** A frequency dependent ray theory // PhD thesis. The University of Texas at Austin. 1987.

Hobro J.W.D., Nichols D., Fletcher R. Direct representation of complex, high contrast velocity features in Kirchhoff PreSDM velocity models // 70th EAGE Conference and Exhibition. Expanded Abstracts. 2008.

Lomax A. The wavelength-smoothing method for approximating broad-band wave propagation through complicated velocity structures // Geophys. J. Int. 1994. V. 117. P. 313–334.

Lomax A., Snieder R. Estimation of finite-frequency waveforms through wavelength-dependent averaging of velocity // Geophys. J. Int. 1996. V. 126. P. 369–381.

Popov M.M. Ray theory and gaussian beam method for geophysicists // EDUFBA. 2002.

Protasov M.I., Tcheverda V.A. True amplitude imaging by inverse generalized Radon transform based on Gaussian beam decomposition of the acoustic Green function // Geophysical Prospecting. 2011. V. 59 (2). P. 197–209.

Protasov M.I., Tcheverda V.A. True amplitude elastic Gaussian beam imaging of multicomponent walkaway vertical seismic profile data // Geophysical Prospecting. 2012. V. 60 (6). P. 1030–1042.

Yarman E., Cheng X., Osypov K., Nichols D., Protasov M. Band-limited ray tracing // Geophysical Prospecting. 2013. V. 61, N 6. P. 1194–1205.

*Поступила в редакцию 13 сентября 2015 г.,
в окончательном варианте – 4 октября 2015 г.*

КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

ПРОТАСОВ Максим Игоревич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории вычислительных методов геофизики Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН.

E-mail: protasovmi@ipgg.sbras.ru; тел.: +7(383)330-27-96.