



## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

**М.С. Денисов**

ООО “ГЕОЛАБ-ИТ”

119071, Москва, ул. Орджоникидзе, 12/4, Россия; e-mail: [denisovms@gmail.com](mailto:denisovms@gmail.com)

Процедуры прямого и обращенного продолжения волнового поля позволяют существенно расширить возможности традиционных подходов к обработке материалов сейсморазведки. В сложных сейсмогеологических условиях решение таких задач, как прогнозирование кратных волн, коррекция за неоднородности верхней части разреза, построение глубинно-скоростной модели среды, миграция и т. п., требует привлечения волновых продолжений. В статье теоретически обосновываются нелучевые алгоритмы для сред, описываемых слоистыми моделями. Проводится параллель с асимптотическими лучевыми методами. Описан способ решения прямых динамических задач для слоистых сред с учетом эффектов преломления и отражения на криволинейных границах.

*Слоистые среды, продолжение волнового поля, интеграл Кирхгофа, дифракция*

### THEORETICAL ASPECTS OF WAVEFIELD EXTRAPOLATION IN LAYERED MEDIUM

**M.S. Denisov**

“GEOLAB-IT” Ltd

119071, Moscow, Ordzhonikidze str., 12/4, Russia; e-mail: [denisovms@gmail.com](mailto:denisovms@gmail.com)

Forward and inverse wavefield extrapolation significantly broadens the capabilities of traditional approaches to seismic data processing. In complex seismic and geological conditions such problems as multiple prediction, correction for near-surface heterogeneities, velocity-depth model building, seismic migration, etc. require application of the wavefield extrapolation methods. The paper presents the theoretical background of the non-ray wavefield extrapolation in layered media. It reveals its relation to the ray-based schemes and describes a devised method for true-amplitude modeling of waves in layered earth with account for reflection and transitions effects at curved boundaries.

*Layered medium, wavefield extrapolation, Kirchhoff integral, diffraction*

### ВВЕДЕНИЕ

Значительное число методик и алгоритмов, применяемых при обработке сейсмических данных, явно или неявно привлекают процедуру продолжения волнового поля. На прямом и обращенном продолжении поля основаны решения таких задач, как коррекция влияния верхней части разреза, коррекция уровня приведения, замещение слоя [Денисов, Силаенков, 2008], прогнозирование и подавление кратных волн [Денисов, Кузнецов, 2006] и пр. Продолжение поля может также привлекаться при оценивании глубинно-скоростной модели среды и построении глубинного мигрированного разреза [Глоговский и др., 1998; Денисов, 2013].

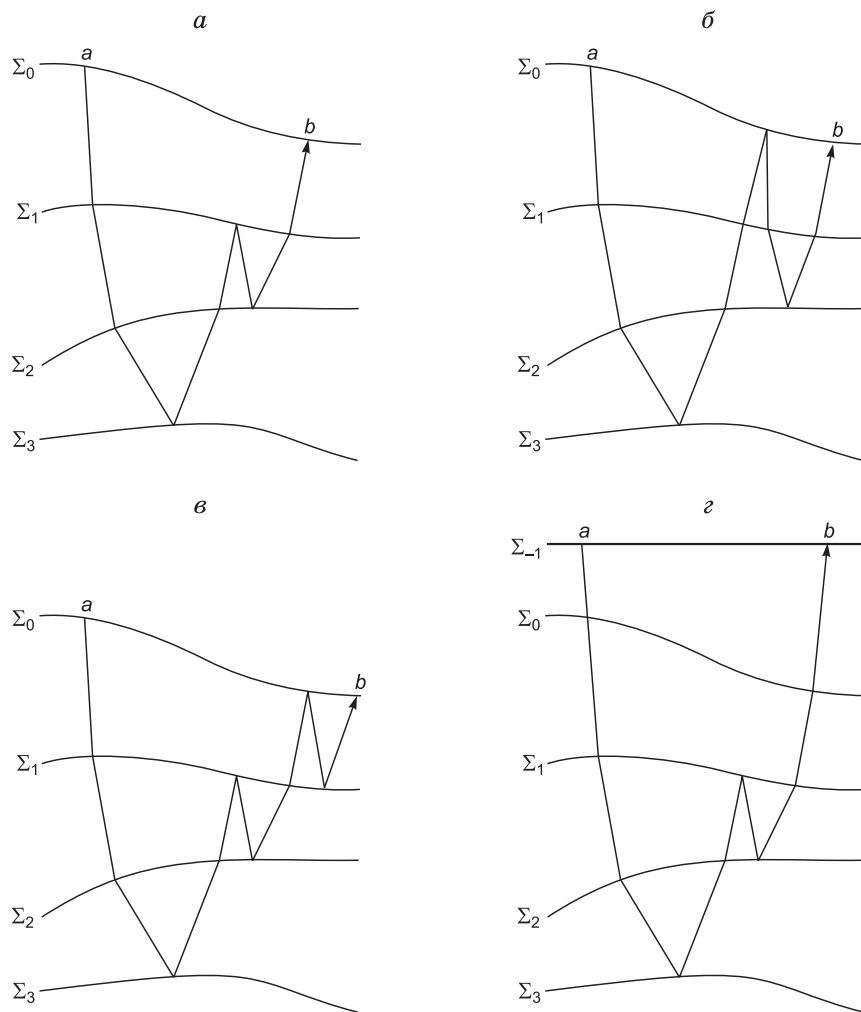
Теория продолжения волнового поля в однородных средах, базирующаяся на интегральной формуле Кирхгофа [Боганик, Гурвич, 2006], хорошо разработана и тщательно изучена. Известны ее обобщения на неоднородные среды, характеризующиеся слабым контрастом скоростей [Berkhout, Wapenaar, 1989], однако, как правило, практический интерес представляют методы, способные осуществлять волновые продолжения в средах, описываемых слоистыми моделями. Теория и методология таких процедур развиты пока недостаточно, и при необходимости реализации соответствующих алгоритмов обычно привлекается

асимптотическое лучевое описание волновых процессов [Гольдин, 1985; Петрашень, Нахамкин, 1973], что сужает область применимости преобразований. В настоящем исследовании мы рассмотрим теоретическое обоснование волновых продолжений в слоистой среде с криволинейными границами.

### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Если на пути от источника, расположенного в точке с вектор-координатой  $a$ , к приемнику  $b$  волна  $D$  не претерпела ни одного акта отражения от глубинных границ, но, возможно, претерпела преломления, то такую волну принято называть прямой волной. Волна  $Z$ , претерпевшая хотя бы одно отражение, называется отраженной волной. Будем полагать, что среда, в которой распространяется волна, состоит из локально-однородных слоев, разделенных криволинейными границами.

Введем понятие индекса волны, который будет показывать, на каких границах интересующая нас волна претерпевает преломления и от каких границ она отражается. Для этого предварительно пронумеруем границы  $\Sigma$ , присвоив свободной поверхности нулевой порядковый номер  $\Sigma_0$ , первому глубинному горизонту присвоим первый номер  $\Sigma_1$  и т. д. до са-



**Рис. 1.** Сигналы, используемые для демонстрации свойств алгоритма продолжения поля по волне заданного индекса (схематически показаны пути распространения волн):

*a* – кратная волна, корректно преобразуемая алгоритмом; *б* – кратная волна, связанная с переотражением от свободной поверхности, преобразуется некорректно; *в* – путь, пройденный волной в результате прямого продолжения по отраженной волне со стороны приемника; *г* – продолжение поля по прямой волне с целью коррекции за кривизну рельефа дневной поверхности.

мого глубокого горизонта  $\Sigma_N$ , имеющего порядковый номер  $N$ , отражения от которого регистрируются в процессе сейсмического эксперимента. Пронумеруем слои так, чтобы номер слоя соответствовал номеру горизонта, составляющего его кровлю. Индекс волны будем записывать в виде последовательности номеров пройденных слоев, снабдив их стрелкой, условно показывающей направление распространения в каждом слое. Например, для волны, схематически изображенной на рис. 1, *a*, индекс запишем в виде  $0^{\downarrow}1^{\downarrow}2^{\downarrow}2^{\uparrow}1^{\uparrow}1^{\downarrow}0^{\uparrow}$ . Такая волна, будучи излученной источником *a*, прошла слои 0, 1, 2, преломляясь на глубинных границах  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ , затем отразилась от  $\Sigma_3$ , прошла слой 2 в противоположном направлении, преломилась на  $\Sigma_2$ , подошла снизу к  $\Sigma_1$  и отразилась от него. После отражения от  $\Sigma_2$  волна проходит через слои 1 и 0, а затем зарегистрируется в точке *b*.

Крайний слева элемент в индексе волны всегда указывает на условия со стороны источника, а крайний справа – на условия со стороны приемника. Будем называть правым (левым) крылом индекса группу элементов, расположенных с правой (левой) стороны. При обратном продолжении со стороны приемни-

ка из правого крыла индекса всех волн, формирующих поле, устраняется заданная последовательность элементов. При прямом продолжении поля со стороны приемника к правому крылу индекса такая последовательность дописывается. Эта последовательность сама образует индекс некоторой волны, прямой или отраженной. Тем самым мы определяем процедуру прямого или обратного продолжения со стороны приемника по волне заданного индекса. Аналогично определяется продолжение со стороны источника.

Описанная схема отличается от традиционного понимания продолжения поля, когда требуется применить преобразование исходных данных, результат которого соответствовал бы записи, которая была бы получена при сейсмическом эксперименте с заданным новым положением приемника или источника, обеспечивая корректную трансформацию всех зарегистрированных волн. Обратное продолжение по волне определенного индекса не приведет к получению такого поля, и нашей целью является корректная трансформация наиболее существенного для последующей обработки и интерпретации класса волн – однократно отраженных волн. Впрочем, используемая

нами схема продолжения окажется корректной и для определенного семейства кратных волн, и это будет отдельно оговорено в дальнейшем. При прямом продолжении поля корректно преобразуются как однократные, так и кратные волны.

Теоретический аспект задачи продолжения сейсмических волн, разработке которого посвящена работа, может быть использован и при построении алгоритма продолжения поля в традиционном его понимании. Однако такая реализация волновых продолжений оказывается неустойчивой к погрешностям глубинно-скоростной модели среды, порождая множество артефактов и помех преобразования [Warenaag, 1993]. Практическая ценность подобных алгоритмов сомнительна. Поэтому в настоящем исследовании мы сосредоточимся на разработке теоретических аспектов продолжения поля по волне заданного индекса, и такая постановка задачи приводит к получению устойчивых решений. Если обращенное продолжение поля осуществляется по прямой волне, а прямое продолжение – по прямой или отраженной волне, то корректность преобразования для однократных отражений, а также для определенного класса кратных волн гарантирована.

Проиллюстрируем это утверждение с помощью рис. 1, а. Пусть требуется пересчитать волновое поле, возбужденное и регистрируемое на  $\Sigma_0$ , на новый уровень приведения, совпадающий с криволинейной поверхностью  $\Sigma_1$ . Со стороны приемника применяем обращенное продолжение по волне индекса  $0^\uparrow$ , т. е. по прямой волне, возбуждаемой на  $\Sigma_1$  и регистрируемой на  $\Sigma_0$ . Показанная волна трансформируется в волну с индексом  $0^\downarrow 1^\downarrow 2^\downarrow 2^\uparrow 1^\uparrow 1^\uparrow 1^\uparrow$ . Применим к результату обращенное продолжение по этой же волне, но со стороны источника. От индексов всех волн слева устраним элемент  $0^\downarrow$ , и для нашей волны имеем  $1^\downarrow 2^\downarrow 2^\uparrow 1^\uparrow 1^\uparrow 1^\uparrow$ . Такому индексу соответствует волна, которая была бы возбуждена на  $\Sigma_1$  и после серии преломлений и отражений была бы зарегистрирована на  $\Sigma_1$ . Преобразование оказывается корректным для всех однократных волн, содержащихся в исходном поле: полученные волны соответствуют отражениям, которые были бы зарегистрированы в процессе сейсмического эксперимента. Однако будучи примененным к кратным волнам, связанным с переотражением от свободной поверхности, этот принцип нарушается. Например, для волны, показанной на рис. 1, б и имеющей индекс  $0^\downarrow 1^\downarrow 2^\downarrow 2^\uparrow 1^\uparrow 0^\uparrow 0^\downarrow 1^\downarrow 1^\uparrow 0^\uparrow$ , результатом обращенного продолжения на  $\Sigma_1$  будет волна  $1^\downarrow 2^\downarrow 2^\uparrow 1^\uparrow 0^\uparrow 0^\downarrow 1^\downarrow 1^\uparrow$ , в которой содержатся элементы  $0^\uparrow$  и  $0^\downarrow$ , что обуславливает ее несоответствие полю, которое было бы зарегистрировано при возбуждении и наблюдении на уровне  $\Sigma_1$  в отсутствие границы  $\Sigma_0$ . Полученная волна будет интерпретироваться как ложная синфазность. Это свойство обращенного продолжения поля по волне заданного индекса следует принимать во внимание и при необходимости устранять из исходных сейсмограмм кратные волны, которые могут приводить к появлению таких помех.

С иной ситуацией мы имеем дело в случае прямого продолжения поля. При преобразовании со стороны приемника все волны трансформируются так, что к их индексу справа дописывается индекс волны, по которой производится продолжение. При преобразовании со стороны источника все волны трансформируются так, что к их индексу слева дописывается индекс волны, по которой производится продолжение.

Пусть, например, требуется продолжить поле со стороны приемника по однократно отраженной волне с индексом  $0^\downarrow 0^\uparrow$ . Тогда из волны, показанной на рис. 1, а, получим волну, имеющую индекс  $0^\downarrow 1^\downarrow 2^\downarrow 2^\uparrow 1^\uparrow 1^\uparrow 0^\uparrow 0^\downarrow 0^\uparrow$ , а пройденный ею путь изображен на рис. 1, в. Очевидно, что таким продолжением мы смоделируем реверберацию в слое с нулевым порядковым номером, корректно преобразовав все однократные волны в кратные волны первого порядка кратности, и повысим порядок кратности всех кратных волн, содержащихся в исходном поле. Если требуется, например, продолжить поле со стороны приемника по однократно волне, отраженной от второй границы, индекс которой  $0^\downarrow 1^\downarrow 1^\uparrow 0^\uparrow$ , то индекс рассматриваемой нами волны преобразуется в  $0^\downarrow 1^\downarrow 2^\downarrow 2^\uparrow 1^\uparrow 1^\uparrow 0^\uparrow 0^\downarrow 1^\downarrow 1^\uparrow 0^\uparrow$ . Аналогичное изменение индекса происходит у всех волн, содержащихся в исходном поле. Таким способом мы имитируем процесс образования кратных волн со стороны приемника: моделируется реверберация, возникающая между свободной поверхностью и вторым глубинным горизонтом. Прямое продолжение поля может производиться не только в нижнее полупространство, но и в среду, как бы надстроенную в верхнем полупространстве, при этом все волны, содержащиеся в исходном поле, преобразуются корректно (см. рис. 1, з).

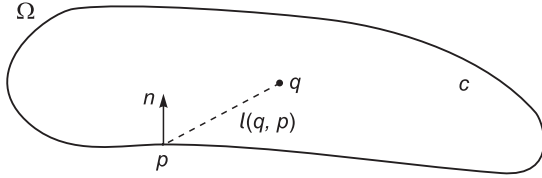
Будем рассматривать две взаимосвязанные задачи: расчет поля волны заданного индекса (прямая динамическая задача для слоистой среды) и продолжение поля по волне заданного индекса. В рамках настоящего исследования разработка алгоритма решения прямых задач является скорее вспомогательной, т. е. обеспечивающей построение оператора продолжения поля в слоистой среде, но в других приложениях она имеет самостоятельную ценность. Развиваемые здесь схемы продолжения поля в слоистых средах с криволинейными границами не опираются на лучевую аппроксимацию волнового поля. Поэтому корректно учитываются нелучевые явления, возникающие при взаимодействии волны с неоднородностями среды, например эффекты дифракции.

## ИНТЕГРАЛ КИРХГОФА

Прямое продолжение поля упругой волны в однородной среде обычно производится на основании интегральной формулы Кирхгофа. Пусть задана глобальная декартова система координат и пусть требуется рассчитать спектральную характеристику  $U(q, \omega) = U(q)$  поля в точке с координатой  $q$ . В дальнейшем, где это не приведет к путанице, будем для краткости называть  $U$  и аналогичные ей функции волновым полем, а также будем опускать аргумент спектральных функций  $\omega$ .

Если определена замкнутая поверхность  $\Omega$ , на которой известно как поле  $U_\Omega$ , так и его производная  $\frac{\partial U_\Omega}{\partial n}$  по нормали к  $\Omega$ , при этом точка  $q$  находится внутри объема, ограниченного поверхностью, и этот объем сформирован однородной средой с постоянной скоростью  $c$  распространения волн интересующего нас типа, а источник колебаний расположен вне этого объема, то

$$U(q) = \int \left( U_\Omega \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U_\Omega}{\partial n} \right) d\Omega, \quad (1)$$



**Рис. 2.** Вычисление волнового поля в точке  $q$ , расположенной внутри объема, ограниченного поверхностью  $\Omega$ , при помощи интеграла Кирхгофа.

где  $\int d\Omega = \int_{p \in \Omega} dp$  – сокращенная запись интеграла по поверхности  $\Omega$ . Вектор нормали выбирается направленным внутрь объема (рис. 2).  $G = G(q, p)$  – спектральная характеристика функции Грина, которая совпадает с полем источника, расположенного в точке с вектор-координатой  $q$  и регистрируемого в точке  $p$  на  $\Omega$ , т. е.

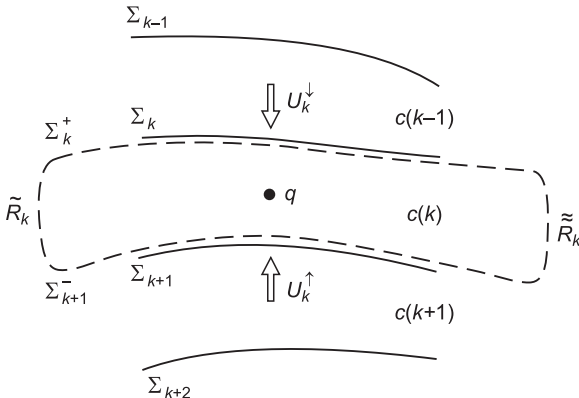
$$G(q, p) = \frac{e^{j\omega \frac{l(q, p)}{c}}}{l(q, p)},$$

где  $l(q, p)$  – расстояние между  $q$  и  $p$ ,  $j = \sqrt{-1}$ .

Обращенное продолжение поля производится при помощи выражения, аналогичного (1), в котором вместо  $G$  используется комплексно сопряженная функция  $G^*$  [Петрашень, Нахамкин, 1973].

#### МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ИНТЕГРАЛ КИРХГОФА

Пусть среда описывается слоистой моделью с криволинейными границами и пусть нас интересует спектральная характеристика волнового поля в точке  $q$ , расположенной в  $k$ -м слое, при этом известны поле и его производные по нормали на кровле  $\Sigma_k$  и на подошве  $\Sigma_{k+1}$  этого слоя (рис. 3). Слои характеризуются локально-постоянной скоростью  $c(k)$ . Поставленная задача может быть решена при помощи интегрального преобразования (1). В данной ситуации поверхность  $\Omega$  целесообразно составить из четырех элементов  $\Omega = \Sigma_k^+ + \Sigma_{k+1}^- + \tilde{R}_k + \tilde{R}_k^+$ ,  $\Sigma_k^+$  расположена чуть ниже кровли слоя  $\Sigma_k$ ,  $\Sigma_{k+1}^-$  расположена чуть выше подошвы слоя  $\Sigma_{k+1}$ ,  $\tilde{R}_k$  и  $\tilde{R}_k^+$  – полусферы, замыкающие  $\Sigma_k^+$  и  $\Sigma_{k+1}^-$  на бесконечном удалении от точки  $q$ . Предположим, что вкладом от бесконечно удаленных полусфер  $\tilde{R}_k$  и  $\tilde{R}_k^+$  можно пренебречь. Такая гипоте-



**Рис. 3.** Вывод модифицированного интеграла Кирхгофа.

за носит название условия Зоммерфельда и оказывается справедливой во всех практически важных ситуациях [Bleistein et al., 2000]. Тогда можно ограничиться интегрированием по кровле и подошве слоя, положив  $\Omega = \Sigma_k^+ + \Sigma_{k+1}^-$ . Направим ось  $z$  декартовой системы координат в глубину среды так, чтобы граница  $\Sigma_k$  оказалась выше  $\Sigma_{k+1}$ . Тогда ту компоненту волнового поля, которая подходит к точке  $q$  сверху, пересекая границу  $\Sigma_k$ , будем обозначать через  $U_k^\downarrow$ . Компоненту поля, подходящую снизу, пересекая границу  $\Sigma_{k+1}$ , будем обозначать через  $U_k^\uparrow$ . Если источник упругих колебаний  $a$  расположен выше точки  $q$ , например, на свободной поверхности или в приповерхностном слое, то прямая волна, распространяющаяся из  $a$  в  $q$ , подходит к  $q$  сверху, пересекая  $\Sigma_k^+$ . Очевидно, что все волны, подходящие к  $q$  снизу, пересекая  $\Sigma_{k+1}^-$ , претерпели хотя бы один акт отражения.

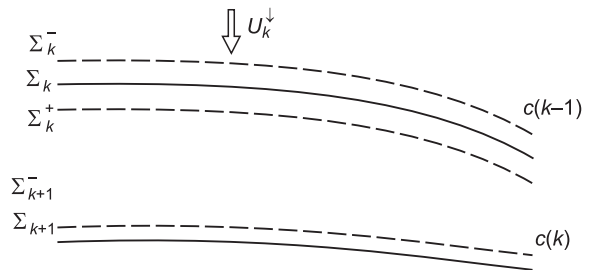
Пусть требуется получить поле только прямой волны. Тогда в (1) в качестве поверхности интегрирования следует использовать  $\Omega = \Sigma_k^+$  (такой выбор является необходимым, но не достаточным условием, так как поле  $U_k^\downarrow$  уже содержит волны, претерпевшие переотражения в слоях с порядковыми номерами  $m < k$ , т. е. расположенных выше  $k$ -го слоя, и этот вопрос мы подробно рассмотрим ниже:

$$U(q) = \int \left( U_{\Sigma_k^+} \frac{\partial G}{\partial n_k} - G \frac{\partial U_{\Sigma_k^+}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k^+, \quad (2)$$

где  $n_k$  – вектор нормали к  $\Sigma_k$ . Выражение (2) может интерпретироваться как модифицированный интеграл Кирхгофа. Такое преобразование волнового поля подробно исследовано в работе [Berkhout, Wapenaar, 1989].

#### ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛЯ ЧЕРЕЗ СЛОЙ, ГИПОТЕЗА РЭЛЕЯ

Для каждого  $k$ -го слоя будем использовать такую функцию Грина, которой соответствует положение источника вблизи кровли  $\Sigma_k$ , а приемника – вблизи подошвы  $\Sigma_{k+1}$ . Поэтому в слое с порядковым номером  $k$  будем обозначать функцию Грина через  $G_{k, k+1}$ . Пусть на уровне чуть выше  $\Sigma_k$  известно поле  $U_k^\downarrow$ , падающее на границу, и известна его производная по нормали к этой границе (рис. 4). Сконструируем алгоритм пересчета  $U_k^\downarrow$  в  $U_{k+1}^\downarrow$ , т. е. получим метод продолжения волнового поля с криволинейного уровня  $\Sigma_k^-$  на криволинейный уровень  $\Sigma_{k+1}^-$ . Для этого необходимо указать способ прохождения полем волны и его производной через границу  $\Sigma_k$ , тем са-



**Рис. 4.** Способ продолжения волнового поля через  $k$ -й слой.

мым получить их на уровне  $\Sigma_k^+$ . Затем следует продолжить полученные характеристики с  $\Sigma_k^+$  на  $\Sigma_{k+1}^-$ . Для решения первой задачи воспользуемся условиями жесткого контакта [Бреховских, 1973], откуда следуют формулы связи поля и его производной по разные стороны от границы

$$U_{\Sigma_k^+} = U_{\Sigma_k^-}, \quad \frac{\partial U_{\Sigma_k^+}}{\partial n_k} = \frac{\partial U_{\Sigma_k^-}}{\partial n_k}. \quad (3)$$

Для решения второй задачи привлечем гипотезу локальной однородности слоя. Имея поле и его производную, заданные на  $\Sigma_k^+$ , воспользуемся интегральным преобразованием (2) для получения поля  $U_{\Sigma_{k+1}^-}$  на  $\Sigma_{k+1}^-$

$$U_{\Sigma_{k+1}^-} = \int \left( U_{\Sigma_k^+} \frac{\partial G_{k,k+1}}{\partial n_k} - G_{k,k+1} \frac{\partial U_{\Sigma_k^+}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k^+, \quad (4)$$

где  $U_{\Sigma_{k+1}^-} = U_{\Sigma_{k+1}^-}(q)$  – искомая спектральная характеристика в произвольной точке  $q$ ,  $q \in \Sigma_{k+1}^-$ , и

$$G_{k,k+1}(q, p) = e^{\frac{j\omega l(q,p)}{c(k)}}. \quad (5)$$

Подставим (3) в (4) и получим окончательное выражение для пересчета волнового поля с  $\Sigma_k^+$  на  $\Sigma_{k+1}^-$

$$U_{\Sigma_{k+1}^-} = \int \left( U_{\Sigma_k^+} \frac{\partial G_{k,k+1}}{\partial n_k} - G_{k,k+1} \frac{\partial U_{\Sigma_k^+}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k^+. \quad (6)$$

Кривизна границы  $\Sigma_k$  не может быть произвольной, хотя мы нигде в явном виде не накладывали соответствующих ограничений. Пользоваться интегралом (6) с функцией Грина (5) можно в случае, если в  $k$ -м слое волна не претерпевает переотражений на элементах границы  $\Sigma_k$  или если их энергия мала по сравнению с энергией преломленной волны. Такое допущение также называют гипотезой Рэлея [Стретт, 1955], и именно оно определяет необходимую степень гладкости границы.

### РЕКУРСИВНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛЯ

Чтобы при расчете поля прямой волны, а также при продолжении поля устранить эффект образования кратных волн на границах, входящих в модель среды, и, как следствие, получить только прямую волну заданного индекса, следует организовать послойный процесс вычислений, приводящий к рекурсивной схеме, которая предложена в [Warepaar, 1993].

Пусть источник упругих волн расположен в слое с нулевым порядковым номером в точке  $a$  (рис. 5). Для получения поля прямой волны в произвольной точке, расположенной в нижележащем слое, имеющем первый порядковый номер, следует воспользоваться преобразованием (6), интегрируя по поверхности  $\Sigma_1^-$ . В этом выражении в качестве  $U_{\Sigma_k^-} = U_{\Sigma_1^-}$  фигурирует поле только прямой волны  $U_1^\downarrow$ , вызванной точечным источником и наблюдаемой на  $\Sigma_1^-$ . Выберем точку расчета поля в непосредственной близости от подошвы первого слоя, на уровне  $\Sigma_2^-$ . Тем самым получим поле прямой волны на  $\Sigma_2^-$  и используем

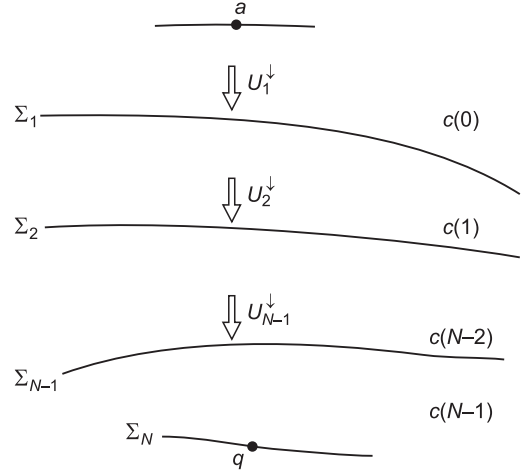


Рис. 5. Рекурсивное продолжение поля в пластовой модели среды.

его для дальнейших расчетов с целью вычислить поле волны на подошве второго слоя. Если точка, для которой требуется получить окончательный результат, расположена в слое с порядковым номером  $N$ , то применяя такую процедуру рекурсивно, т. е. послойно от нулевого до  $(N-1)$ -го слоя, получим метод моделирования поля прямой волны для слоистой среды. Тем самым будет выполнено не только упомянутое выше необходимое условие, но и достаточное условие получения поля только одной волны заданного индекса. Специальным выбором поверхности интегрирования мы устранили отраженные волны, подходящие со стороны подошвы слоя, а за счет привлечения рекурсивной схемы организации вычислений на кровле слоя наблюдается только одна волна, которая продолжается через локально-однородный слой при помощи интеграла Кирхгофа.

### СВОЙСТВО ЛОКАЛЬНОСТИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Волновые процессы, протекающие в упругих средах, обладают свойством локальности [Аки, Ричардс, 1983]. Если рассуждать строго, то можно утверждать, что влияние на форму колебаний  $U(q)$ , происходящих в некоторой точке с вектор-координатой  $q$ , оказывают все элементарные объемы, формирующие среду. Однако не все они вносят одинаковый вклад. Например, при получении волнового поля в соответствии с выражением (6) мы учитываем вклад всех элементов, принадлежащих  $\Sigma_k^-$ . Можно заметить, что решающее влияние на результат обеспечит лишь относительно малая область границы. Эта область оказывается центрированной на траектории луча волны, а ее размер определяется параметром  $\eta$  – размером первой зоны Френеля [Боганик, Гурвич, 2006], которая пропорциональна длине волны колебаний, возбуждаемых источником. Если для генерации волновых процессов в среде используется импульсный источник, то за длину волны можно принять  $\lambda_{\text{дом}}$  – длину волны гармоника, доминирующей в спектре импульса<sup>1</sup>. Тогда интегрирование (6) по всей поверхности

<sup>1</sup> Более корректным способом изучения волновых процессов и, в частности, свойств локальности является анализ задачи для каждой гармоники.

оказывается почти тождественным интегрированию по окрестности  $(\hat{p}-\eta/2, \hat{p}+\eta/2)$  точки  $\hat{p}$  преломления луча

$$U_{\Sigma_{k+1}^-} = \int_{p \in \Sigma_k^-} dp \approx \int_{\hat{p}-\eta/2}^{\hat{p}+\eta/2} dp, \quad (7)$$

и именно в этом заключается принцип локальности волновых процессов. Как следствие, мы можем вводить локальные системы координат на каждой границе, с которой взаимодействует рассматриваемая волна, и изучать эффекты, возникающие при таком взаимодействии отдельно для каждой границы, независимо от аналогичных эффектов, имеющих место при взаимодействии с другими границами.

Часто используется предположение, что источник обеспечивает асимптотически высокочастотное воздействие на среду. Тогда  $\lambda_{\text{дом}} \rightarrow 0$ , и зона Френеля стягивается в точку, а преобразование (7) сводится к оцениванию интеграла по предельно малой окрестности точки  $\hat{p}$ . Математическая формулировка такого приближения и вытекающего из него способа вычисления интеграла соответствуют методу стационарной фазы [Гольдин, 1974]. Их геофизический эквивалент – лучевой подход к анализу волновых процессов [Алексеев, Гельчинский, 1959].

Можно разрабатывать решение поставленных задач моделирования и продолжения волновых полей в лучевом приближении. Однако наряду с преимуществами в виде простоты, наглядности и вычислительной эффективности такое решение обладает известными недостатками, которые особенно сильно сказываются в сложнопостроенных средах [Денисов и др., 2011]. Поэтому настоящее исследование посвящено нелучевым алгоритмам анализа и обработки волновых полей. Эти алгоритмы не рассматриваются как универсальная альтернатива их лучевым аналогам, но предлагаются в виде дополнительного инструмента, к которому целесообразно прибегать в тех ситуациях, когда лучевое приближение оказывается некорректным (например, при учете эффектов дифракции).

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Для реализации преобразования (6) и аналогичных вычислений требуется подставлять в соответствующие формулы не только спектральную характеристику волны, но и ее производную по нормали. Про-

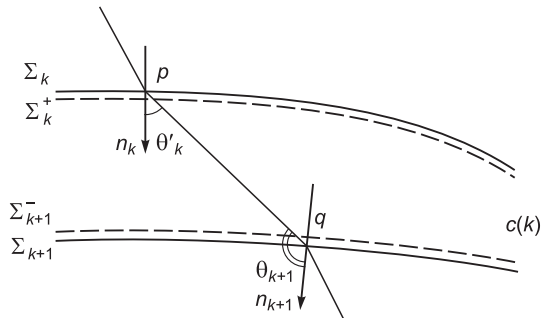


Рис. 6. Условные обозначения, использованные при записи производных волнового поля.

делаем такое дифференцирование для волны  $U_{\Sigma_{k+1}^-}$ , вычисляемой в соответствии с (6):

$$\frac{\partial U_{\Sigma_{k+1}^-}}{\partial n_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial n_{k+1}} \int \left( U_{\Sigma_k} \frac{\partial G_{k,k+1}}{\partial n_k} - G_{k,k+1} \frac{\partial U_{\Sigma_k}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k. \quad (8)$$

Поле прямой волны  $U_{\Sigma_k^-}$  не зависит от геометрии нижележащей  $(k+1)$ -й границы, откуда следует  $\frac{\partial U_{\Sigma_k^-}}{\partial n_{k+1}} \equiv 0$ . С учетом этого от (8) переходим к

$$\frac{\partial U_{\Sigma_{k+1}^-}}{\partial n_{k+1}} = \int \left( U_{\Sigma_k} \frac{\partial^2 G_{k,k+1}}{\partial n_{k+1} \partial n_k} - \frac{\partial G_{k,k+1}}{\partial n_{k+1}} \frac{\partial U_{\Sigma_k}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k. \quad (9)$$

Воспользуемся функцией Грина (5) и получим асимптотические выражения для производных

$$\frac{\partial G_{k,k+1}}{\partial n_k} = j\omega \frac{\cos \theta'_k}{c(k)} G_{k,k+1}, \quad \frac{\partial G_{k,k+1}}{\partial n_{k+1}} = j\omega \frac{\cos \theta_{k+1}}{c(k)} G_{k,k+1}. \quad (10)$$

Такое приближение справедливо для толстослойной среды. Исползованные при записи формул (10) обозначения поясняются на рис. 6.

Совокупность выражений (3), (5), (6), (9), (10) определяет способ рекурсивного пересчета поля с уровня  $\Sigma_k^-$  на  $\Sigma_{k+1}^-$ , и с ее помощью можно рассчитать поле прямой волны в  $N$ -слойной среде.

### ПОЛЕ ПРЯМОЙ ВОЛНЫ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Пусть требуется найти спектральную характеристику прямой волны  $D_{0,N} = D_{0,N}(a, q, \omega)$  (рис. 5). Поле падающей волны на подошве нулевого слоя равно  $U_{\Sigma_1^-} = FG_{0,1}$ , где  $F = F(\omega)$  – спектр сейсмического импульса,  $G_{0,1}$  – функция Грина нулевого слоя. Применив правило (10), вычислим производную  $\frac{\partial U_{\Sigma_1^-}}{\partial n_1}$ . Вос-

пользовавшись условиями жесткого контакта (3), получим спектральные характеристики поля и его производной на кровле слоя с первым порядковым номером. Прямую волну  $D_{0,2}$  на подошве этого слоя посчитаем при помощи интегрального преобразования (6)<sup>1</sup>

$$D_{0,2} = F \int \left( G_{0,1} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_1} \right) d\Sigma_1, \quad (11)$$

и затем, воспользовавшись условиями контакта (3), получим преломленную границей  $\Sigma_2$  волну на уровне  $\Sigma_2^+$ . Для ее пересчета на  $\Sigma_2^-$  вновь применим преобразование (6)

$$D_{0,3} = \int \left( D_{0,2} \frac{\partial G_{2,3}}{\partial n_2} - G_{2,3} \frac{\partial D_{0,2}}{\partial n_2} \right) d\Sigma_2, \quad (12)$$

где  $G_{2,3}$  – функция Грина второго слоя. Отсюда получаем общее правило рекурсивного пересчета  $D_{0,k-1}$  в  $D_{0,k}$

$$D_{0,k} = \int \left( D_{0,k-1} \frac{\partial G_{k-1,k}}{\partial n_{k-1}} - G_{k-1,k} \frac{\partial D_{0,k-1}}{\partial n_{k-1}} \right) d\Sigma_{k-1}. \quad (13)$$

К искомому результату приходим при  $k = N$ .

<sup>1</sup> Для простоты обозначений будем записывать интеграл по  $\Sigma_k^-$  или  $\Sigma_k^+$  в виде интеграла по  $\Sigma_k$ .

Выражение (13) можно также записать в виде интегрального преобразования, зависящего только от функций Грина в слоях с порядковыми номерами от 0 до  $(N-1)$ . В результате мы получили бы  $(N-1)$ -кратный интеграл, под знаком которого фигурировали бы функции  $G_{0,1}, \dots, G_{N-1,N}$ . Соответствующее выражение здесь не приводится, а получить его можно последовательными подстановками формул для  $D_{0,k-1}$  в формулу для  $D_{0,k}$ . Например, подставим (11) в (12) и т. д. Затем можно, опираясь на лучевую асимптотику, получить оценку интеграла по методу стационарной фазы, что привело бы нас к известным выражениям для расчета динамики прямых волн, приведенным в работе [Алексеев, Гельчинский, 1959], где они получены авторами на основании иных принципов. Эти же выражения воспроизведены в более доступном источнике [Денисов, 2008].

Как и ожидалось, результат вычислений при помощи рекурсивной схемы (13) соответствует полю только одной прямой волны и не содержит кратных отражений, образующихся на промежуточных границах.

### ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛЯ ПО ПРЯМОЙ ВОЛНЕ

Пусть поставлена задача продолжения поля, наблюдаемого на уровне  $\Sigma_0$ , на другой уровень  $-\Sigma_N$  по прямой волне. Для вычисления спектральной характеристики поля на подошве нулевого слоя воспользуемся выражением (6)

$$U_{\Sigma_1^-} = \int \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_0} - G_{0,1} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) d\Sigma_0. \quad (14)$$

Воспользуемся условиями жесткого контакта (3) для пересчета поля и его производной на уровень  $\Sigma_1^+$ , после чего рассчитаем поле на подошве первого слоя как

$$U_{\Sigma_2^-} = \int \left( U_{\Sigma_1^+} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial U_{\Sigma_1^+}}{\partial n_1} \right) d\Sigma_1^+. \quad (15)$$

Подставим (14) в (15). После громоздких преобразований (вынесенных в Приложение) получим

$$U_{\Sigma_2^-} = F^{-1} \int \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,2}}{\partial n_0} - D_{0,2} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) d\Sigma_0, \quad (16)$$

где  $D_{0,2}$  определяется выражением (11), а  $F^{-1} = \frac{1}{F}$  –

спектр фильтра сжатия импульса. Преобразовав полученное поле с подошвы первого слоя на кровлю второго слоя при помощи (3), пересчитаем результат на подошву второго слоя (или, что эквивалентно, на кровлю третьего слоя)

$$U_{\Sigma_3^-} = \int \left( U_{\Sigma_2^+} \frac{\partial G_{2,3}}{\partial n_2} - G_{2,3} \frac{\partial U_{\Sigma_2^+}}{\partial n_2} \right) d\Sigma_2^+. \quad (17)$$

Подставив (16) в (17), получим

$$U_{\Sigma_3^-} = F^{-1} \int \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,3}}{\partial n_0} - D_{0,3} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) d\Sigma_0, \quad (18)$$

где  $D_{0,3}$  определяется выражением (13).

Применяя аналогичные рассуждения для всех слоев модели, получим искомый результат продолжения поля на уровень  $\Sigma_N$  в виде

$$U_{\Sigma_N} = \int \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,N}}{\partial n_0} - D_{0,N} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) d\Sigma_0. \quad (19)$$

Таким образом, прямое или обратное продолжение поля с уровня  $\Sigma_0$  на  $\Sigma_N$  в слоистой среде осуществляется при помощи интегрального преобразования (19), которое по форме напоминает интеграл Кирхгофа, при этом в качестве функции Грина выступает прямая волна.

### ПОЛЕ ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЫ, ПРИБЛИЖЕНИЕ КИРХГОФА

Если волна отразилась от некоторой границы, она начинает распространяться в обратном направлении, вследствие чего изменяется способ нумерации слоев и границ (рис. 7). В частности, хотя сразу после отражения от  $k$ -й границы волна распространяется в том же слое, что и до отражения, мы присваиваем этому сегменту слоя следующий порядковый номер, и подошвой следующего слоя становится та же глубинная граница, которая служила кровлей предыдущего слоя. Это же правило применяем для нумерации остальных слоев и границ. Отраженная волна, по крайней мере, дважды проходит через один и тот же слой, и каждый слой имеет несколько номеров в зависимости от того, сколько раз через него распространяется интересующая нас волна.

Можно получить удобный способ моделирования акта отражения волны от границы  $\Sigma_k$ , если воспользоваться приближением Кирхгофа [Рытов, 1966; Bleistein et al., 2000], в соответствии с которым поле  $U_{\Sigma_k^+}$  и его производная сразу после отражения связаны с полем падающей волны и его производной соотношениями

$$U_{\Sigma_k^+} = R_k U_{\Sigma_k^-}, \quad \frac{\partial U_{\Sigma_k^+}}{\partial n_k} = -R_k \frac{\partial U_{\Sigma_k^-}}{\partial n_k}, \quad (20)$$

где  $R_k = R_k(p)$  – коэффициент отражения в окрестности точки  $p$ , который может плавно меняться по латерали. Смена знака производной связана с изменением направления распространения волны. Такое приближение обосновано для случая  $\lambda_{\text{ДОМ}} \ll Q$ , где  $Q$  – характерный радиус кривизны границы.

Аналогично тому, как мы рассматривали задачу продолжения поля по прямой волне, изучим задачу продолжения поля по отраженной волне. Сначала получим выражение для отраженной волны, распространяющейся в слоистой среде. Затем результат будет

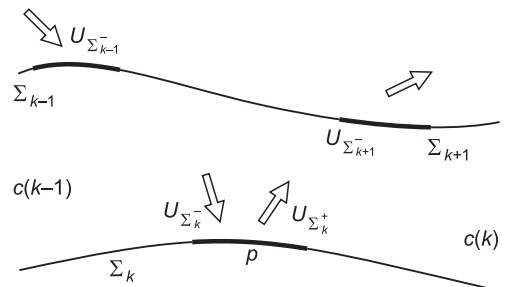


Рис. 7. Расчет поля отраженной волны, учет акта отражения.

использован для построения оператора продолжения поля.

Нас интересует спектральная характеристика волны  $Z_{0,N}^{(k)}$ , излучаемой источником, расположенным на кровле слоя с нулевым порядковым номером, регистрируемой на подошве  $(N-1)$ -го слоя и претерпевшей отражение от  $k$ -й границы. Расчет волн, претерпевших многократные отражения, производится аналогично. Пусть  $D_{0,k}$  – прямая волна, прошедшая фрагмент среды, состоящий из  $k$  слоев. Смоделируем акт отражения, для чего воспользуемся правилом (20). Затем, применив (19) для продолжения с  $\Sigma_k^+$  на подошву слоя, где осуществляется регистрация колебаний, получим искомую спектральную характеристику. Для этого в выражении (19) следует полагать

$$U_{\Sigma_N} = Z_{0,N}^{(k)}, \quad U_{\Sigma_0} = R_k D_{0,k}, \quad \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} = -R_k \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_k}, \quad d\Sigma_0 = d\Sigma_k,$$

$D_{0,N} = D_{k,N}$ , в результате приходим к

$$Z_{0,N}^{(k)} = F^{-1} \int R_k \left( D_{0,k} \frac{\partial D_{k,N}}{\partial n_k} + D_{k,N} \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k. \quad (21)$$

Мы получили представление однократно отраженной волны через две прямые волны. Интегральное выражение для многократно отраженной волны можно получить аналогично. Например, полно- или частично кратная волна первого порядка кратности, связанная с переотражением в нижнее полупространство от свободной поверхности, может быть представлена в виде интеграла (21), при этом интегрирование производится по  $d\Sigma_0$ . Вместо прямых волн  $D$  в интеграле будут фигурировать две однократно отраженные волны  $Z$ . В качестве  $R_k$  будет подставляться  $R_0$  – коэффициент отражения от свободной поверхности. Если требуется получить выражение для кратной волны старшего порядка кратности, то в интеграл подставляются кратные волны.

Как следует из (21), любая однократно отраженная волна раскладывается на две прямые волны: падающую на границу  $\Sigma_k$  со стороны источника и падающую на эту же границу со стороны приемника. Выражение (21) также может служить альтернативой представлению прямой волны в виде (13): любая прямая волна  $D_{0,N}$  может быть разложена на любой границе  $\Sigma_k$ , с которой она взаимодействовала, на две прямые волны:  $D_{0,k}$  – падающую на  $\Sigma_k$  со стороны источника и  $D_{k,N}$  – падающую на  $\Sigma_k$  со стороны приемника. Для вывода такого разложения заменим условие отражения (20) на условие прохождения (3) и получим

$$D_{0,N} = F^{-1} \int \left( D_{0,k} \frac{\partial D_{k,N}}{\partial n_k} - D_{k,N} \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к утверждению о возможности вывода разложений для кратных волн по однократным волнам, или волн старшего порядка кратности по кратным волнам меньшего порядка кратности, а также по однократно отраженным или прямым волнам.

### ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛЯ ПО ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЕ

Рассмотрим задачу продолжения поля через слой, аналогичную той, которая была решена ранее, но поставленную для волны, претерпевающей не пре-

ломление на  $\Sigma_k$ , а отражение от этой границы. Зная поле, падающее на  $\Sigma_k$ , получим поле на подошве  $k$ -го слоя, при этом рассуждения ведутся с учетом особенностей нумерации слоев и границ для волны, претерпевшей отражение (рис. 7). Нам потребуется смоделировать акт отражения и последующее распространение через локально-однородный слой. Такую процедуру будем называть продолжением поля по отраженной волне.

Имея поле  $U_{\Sigma_0}$ , падающее на систему слоев, сначала получим поле и его производную на уровне  $\Sigma_k^-$ , т. е. непосредственно перед актом отражения. Затем, воспользовавшись правилом (20), отразим поле от границы, после чего продолжим результат на подошву  $N$ -го слоя, где регистрируются колебания. С этой целью применим преобразование (19), подставив в него  $D_{0,k}$  вместо  $D_{0,N}$

$$U_{\Sigma_k} = F^{-1} \int \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_0} - D_{0,k} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) d\Sigma_0. \quad (22)$$

Продолжение с  $\Sigma_k^+$  на  $\Sigma_N$  осуществляется как

$$U_{\Sigma_N} = F^{-1} \int \left( U_{\Sigma_k} \frac{\partial D_{k,N}}{\partial n_k} - D_{k,N} \frac{\partial U_{\Sigma_k}}{\partial n_k} \right) d\Sigma_k. \quad (23)$$

Подставив (22) в (23) и учитывая (20), приходим к

$$U_{\Sigma_N} = F^{-1} \int \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial Z_{0,N}^{(k)}}{\partial n_0} - Z_{0,N}^{(k)} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) d\Sigma_0, \quad (24)$$

где функция  $Z_{0,N}^{(k)}$  описывается формулой (21). Подробности вывода выражения (24) вынесены в Приложение.

Как и ожидалось, для продолжения поля по отраженной волне следует использовать интеграл (19), подставляя в него поле волны, по которой требуется осуществить продолжение. Такое выражение по форме совпадает с интегралом Кирхгофа, в котором в качестве функции Грина используется  $Z_{0,N}^{(k)}$ .

### ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛЯ, ЗАДАННОГО НА ЛОКАЛЬНО-ПЛОСКОМ УРОВНЕ. ИНТЕГРАЛ РЭЛЕЯ

Если исходный уровень  $\Sigma_0$ , на котором наблюдается поле, может считаться локально-плоским, то процедура продолжения через слоистую среду существенно упрощается, так как может быть произведена без привлечения производной по нормали. Логика рассуждений этого раздела статьи будет обратной относительно логики предыдущих разделов. Прежде мы на первом шаге выводили интегральное выражение для поля интересующей нас волны, а затем, на втором шаге, построив рекурсивную процедуру продолжения поля по волне заданного индекса и получив нужный результат, показывали, что в интегральном операторе продолжения фигурирует поле волны заданного индекса. Здесь нам будет удобнее придерживаться обратной последовательности: получив выражения для продолжения поля на новый уровень приведения, аналогичные (19) и (24), покажем, что в них участвует волна заданного индекса. Этот факт не становится очевидным в процессе построения алгоритма продолжения поля, так как для продолжения через слой с нулевым порядковым номером, в отличие от прежних рассуждений, в качестве функции Грина мы



будем использовать не поле точечного источника, а интерференцию полей, порождаемых двумя источниками противоположной полярности. Однако в результирующем выражении будет участвовать производная интересующей нас волны и, как окажется, эта производная совпадет с производной поля одного точечного источника, порождающего волну, по которой требуется осуществить продолжение.

Воспользуемся известным свойством алгоритма продолжения поля с плоского уровня [Гольдин, 1974], согласно которому функцию Грина  $\bar{G}_{0,1} = \bar{G}_{0,1}(q, p)$  можно определить таким образом, что

$$\bar{G}_{0,1}(q, p) \equiv 0 \text{ при } p \in \Sigma_0, \quad (25)$$

вследствие чего член, содержащий производную поля, в интеграле Кирхгофа (1) или (2) устраняется, а сам интеграл преобразуется в так называемый интеграл Рэлея. Функция Грина (25) является полем двух срабатывающих одновременно точечных источников, расположенных зеркально относительно  $\Sigma_0$  и имеющих противоположную полярность. Производная по нормали к  $\Sigma_0$  функции Грина  $\bar{G}_{0,1}$  связана с производной функции  $G_{0,1}$  соотношением

$$\frac{\partial \bar{G}_{0,1}}{\partial n_0} = 2 \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_0}.$$

Результат продолжения поля на подошву нулевого слоя получим в соответствии с (6) и с учетом (25)

$$U_{\Sigma_1^-} = 2 \int_{\Sigma_0} U_{\Sigma_0} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_0} d\Sigma_0. \quad (26)$$

Теперь на основании (3) преобразуем поле на  $\Sigma_1^+$ . Как и все глубинные границы (за исключением  $\Sigma_0$ ),  $\Sigma_1$  криволинейна. Следовательно, конструируя алгоритм продолжения поля на подошву первого слоя, мы не можем построить функцию Грина, обладающую свойством  $\bar{G}_{1,2}(q, p) \equiv 0$  при  $p \in \Sigma_1$ , и нам необходимо воспользоваться выражением (6), в котором для расчетов используются как поле  $U_{\Sigma_1^+}$ , так и его производная. Поэтому подставим (26) в (6) и вновь воспользуемся правилом (3) для поля  $U_{\Sigma_2^-}$  и его производной по нормали, используя их в (6) с целью продолжить поле на подошву второго слоя и т. д. Наконец, получим окончательное выражение для продолжения поля с локально-плоского уровня  $\Sigma_0$  на заданный уровень  $\Sigma_N$  в виде интеграла от  $U_{\Sigma_0}$  по поверхности  $\Sigma_0$ , при этом возможен учет актов отражения на глубинных границах (подробности см. в Приложении). Оказывается, что в интеграле в качестве весовой функции используется производная спектральной характеристики  $W_{0,N}$  – прямой или отраженной волны, по которой мы осуществляли продолжение

$$U_{\Sigma_N} = 2F^{-1} \int_{\Sigma_0} U_{\Sigma_0} \frac{\partial W_{0,N}}{\partial n_0} d\Sigma_0. \quad (27)$$

Как упоминалось выше, такой результат нельзя признать очевидным, так как в процессе построения рекурсивной схемы продолжения поля для функции Грина нулевого слоя использовалось выражение в виде интерференции полей, порождаемых двумя точечными источниками, а не одним источником. Вместе с тем оказывается, что полученная в (27) весовая функция совпадает с производной по нормали спектра волны, по которой осуществляется продолжение поля.

Если формулы (19) и (24) можно назвать обобщениями интеграла Кирхгофа на слоистую модель среды, то (27) можно рассматривать как аналогичное обобщение интеграла Рэлея.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее исследование посвящено анализу методов моделирования упругих волн в слоистой среде, состоящей из локально-однородных слоев, а также изучению алгоритмов прямого и обращенного продолжения поля в таких средах.

При расчете прямой или отраженной волны мы намеренно отказались от получения точного решения задачи и стремились игнорировать определенную часть волнового поля. Причина этого заключается в известном свойстве полного решения прямой задачи: результат оказывается чувствительным к погрешностям определения глубинно-скоростной модели среды. Значительно более устойчивым способом расчета поля с целью его дальнейшего использования для волновых продолжений является вычисление лишь одной его компоненты, например прямой или отраженной волны определенного индекса. Для этого мы модифицируем процесс моделирования волны, игнорируя акты ее взаимодействия с одними границами и учитывая взаимодействие с другими границами. Тем самым мы моделируем волну, которая обладает нужными свойствами. Впрочем, нетрудно предложить алгоритм моделирования частично кратных и внутренне кратных волн заданного индекса [Денисов и др., 2011; Фиников, Шалашников, 2013], а затем их можно использовать для построения оператора волновых продолжений.

Известны лучевые решения поставленной задачи, однако область их корректности ограничена. В частности, среда может быть устроена так, что протекающие в ней волновые процессы не поддаются адекватной аппроксимации асимптотическим высокочастотным лучевым приближением. Иногда бывает важно исследовать или учитывать эффекты дифракции, которые возникают при взаимодействии волны с крупно- или мелкомасштабными неоднородностями [Подъяпольский, 1966], что невозможно сделать в рамках лучевой теории. Кроме того, в сложнопостроенных средах возникают проблемы при динамической трассировке лучей, а реализация алгоритмов на основании приведенных в статье интегральных выражений к таким затруднениям не приводит. Описанные алгоритмы не следует рассматривать в виде универсальной альтернативы их лучевым аналогам. Они предлагаются в виде дополнительного способа обработки данных, полученных в сложных сейсмологических условиях. При такой обработке целесообразно сочетать лучевые схемы, которые отличаются достаточной степенью точности и повышенным быстродействием, с нелучевыми подходами, которые можно применять локально. Например, если требуется реализовать продолжение поля через слоистую среду, содержащую как плавные, так и существенно криволинейные контрастные границы, то продолжение через плавные границы рекомендуется производить лучевыми схемами, а для криволинейных контрастных границ можно применить нелучевые алгоритмы. Такой подход развивается в работе [Денисов и др., 2011].

В виде альтернативы традиционному пониманию волнового продолжения вводится понятие продолже-

ния поля по волне заданного индекса, волна может быть прямой или отраженной. В качестве лучевого аналога этого понятия может рассматриваться понятие продолжения поля по семейству лучей волны, введенное в работе [Петрашень, Нахамкин, 1973] для обращенного продолжения по прямой волне.

Описаны два способа продолжения волнового поля: рекурсивный и нерекурсивный. Теоретически они приводят к тождественным результатам. Преимуществом рекурсивного продолжения является простота реализации. При нерекурсивном продолжении поля требуется сначала решить прямую задачу, получив волну заданного индекса, а затем использовать ее в интегральном операторе.

### Приложение ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЯ ПО ПРЯМОЙ ВОЛНЕ

Подстановка (14) в (15) приводит к

$$U_{\Sigma_2} = \iint \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_0} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{0,1} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_0} \right) + G_{1,2} \frac{\partial}{\partial n_1} \left( G_{0,1} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) \right) d\Sigma_0 d\Sigma_1. \quad (\text{П1})$$

Раскроем внутренние скобки в (П1). Учитывая, что  $\frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_1} \equiv 0$  и  $\frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_0} \equiv 0$ , приходим к

$$U_{\Sigma_2} = \iint \left( U_{\Sigma_0} \left( \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_0} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial^2 G_{0,1}}{\partial n_0 \partial n_1} \right) - \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \left( G_{0,1} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_1} \right) \right) d\Sigma_0 d\Sigma_1,$$

откуда следует

$$U_{\Sigma_2} = \iint \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial n_0} \left( G_{0,1} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_1} \right) - \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \left( G_{0,1} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_1} \right) \right) d\Sigma_0 d\Sigma_1.$$

Применив интегрирование по  $d\Sigma_1$  к обоим выражениям, заключенным во внутренние скобки, и учитывая (11), приходим к равенству (16) в основном тексте статьи.

На основании условий (3) преобразуем полученное волновое поле с подошвы первого слоя на кровлю второго слоя. Для переноса на подошву второго слоя используем выражение (17), в котором фигурирует  $U_{\Sigma_2}$ , определяемое в соответствии с (16). Подставив (16) в (17), приходим к

$$U_{\Sigma_3} = F^{-1} \iint \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,2}}{\partial n_0} \frac{\partial G_{2,3}}{\partial n_2} - D_{0,2} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \frac{\partial G_{2,3}}{\partial n_2} - G_{2,3} \frac{\partial}{\partial n_2} \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,2}}{\partial n_0} - D_{0,2} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) \right) d\Sigma_0 d\Sigma_2.$$

Раскрыв внутренние скобки и сгруппировав члены, имеем

$$U_{\Sigma_3} = F^{-1} \iint \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial n_0} \left( D_{0,2} \frac{\partial G_{2,3}}{\partial n_2} - G_{2,3} \frac{\partial D_{0,2}}{\partial n_2} \right) - \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \left( D_{0,2} \frac{\partial G_{2,3}}{\partial n_2} - G_{2,3} \frac{\partial D_{0,2}}{\partial n_2} \right) \right) d\Sigma_0 d\Sigma_2.$$

Применив интегрирование по  $d\Sigma_2$  к обоим выражениям, заключенным во внутренние скобки, и учитывая (12), приходим к формуле (18) в основном тексте статьи.

### ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЯ ПО ОТРАЖЕННОЙ ВОЛНЕ

Подстановка (22) в (23) с учетом (20) приводит к

$$U_{\Sigma_N} = F^{-2} \iint R_k \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_0} \frac{\partial D_{k,N}}{\partial n_k} - D_{0,k} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \frac{\partial D_{k,N}}{\partial n_k} + D_{k,N} U_{\Sigma_0} \frac{\partial^2 D_{0,k}}{\partial n_k \partial n_0} - D_{k,N} \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_k} \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \right) d\Sigma_0 d\Sigma_k.$$

Преобразуем полученное выражение к виду

$$U_{\Sigma_N} = F^{-2} \iint R_k \left( U_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial n_0} \left( D_{0,k} \frac{\partial D_{k,N}}{\partial n_k} + D_{k,N} \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_k} \right) - \frac{\partial U_{\Sigma_0}}{\partial n_0} \left( D_{0,k} \frac{\partial D_{k,N}}{\partial n_k} + D_{k,N} \frac{\partial D_{0,k}}{\partial n_k} \right) \right) d\Sigma_0 d\Sigma_k.$$

Внося оператор интегрирования по  $d\Sigma_k$  под скобки и учитывая выражение (21), определяющее поле отраженной волны  $Z_{0,N}^{(k)}$ , получим формулу (24) в основном тексте статьи.

### ОПЕРАТОР ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЯ С ЛОКАЛЬНО-ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ

Продолжим поле  $U_{\Sigma_1^+}$  на подошву первого слоя при помощи преобразования (6)

$$U_{\Sigma_2} = \int \left( U_{\Sigma_1^+} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial U_{\Sigma_1^+}}{\partial n_1} \right) d\Sigma_1. \quad (\text{П2})$$

Но  $U_{\Sigma_1^+}$  выражается через (26) и (3), подставив которые в (П2), получим

$$U_{\Sigma_2} = 2 \iint U_{\Sigma_0} \left( \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_0} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial^2 G_{0,1}}{\partial n_0 \partial n_1} \right) d\Sigma_0 d\Sigma_1 = 2 \iint U_{\Sigma_0} \frac{\partial}{\partial n_0} \left( G_{0,1} \frac{\partial G_{1,2}}{\partial n_1} - G_{1,2} \frac{\partial G_{0,1}}{\partial n_1} \right) d\Sigma_0 d\Sigma_1.$$

Внесем процедуру интегрирования по  $d\Sigma_1$  под знак оператора дифференцирования  $\frac{\partial}{\partial n_0}$ . Сопоставив

результат с (11), заметим, что в качестве весовой функции при интегрировании поля по поверхности  $d\Sigma_0$  используется производная поля прямой волны

$$U_{\Sigma_2} = 2F^{-1} \int U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,2}}{\partial n_0} d\Sigma_0.$$

Продлав аналогичные рассуждения, основанные на условии жесткого контакта (3) и на преобразовании (6) с криволинейной кровли слоя на криволинейную подошву, приходим к окончательному результату:

$$U_{\Sigma_N} = 2F^{-1} \int U_{\Sigma_0} \frac{\partial D_{0,N}}{\partial n_0} d\Sigma_0. \quad (\text{П3})$$

Если необходимо осуществить продолжение поля с локально-плоского уровня по отраженной волне, то сделаем соответствующие рассуждения и получим итоговое выражение, которое окажется аналогичным (ПЗ), но в нем вместо прямой волны  $D$  будет фигурировать отраженная волна  $Z$  заданного индекса. Поэтому можно записать универсальное выражение (27) для продолжения поля по прямой или отраженной волне  $W$  любого индекса.

### Литература

- Аки К., Ричардс П.** Количественная сейсмология. М.: Мир, 1983. Т. 1. 520 с.
- Алексеев А.С., Гельчинский Б.Я.** О лучевом методе вычисления полей волн в случае неоднородных сред с криволинейными границами раздела // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Часть III. Л.: Изд-во ЛГУ, 1959. С. 107–160.
- Боганик Г.Н., Гурвич И.И.** Сейсморазведка. Тверь: АИС, 2006. 744 с.
- Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
- Глоговский В.М., Лангман С.Л., Фиников Д.Б.** Погружение волнового поля – альтернатива миграции до суммирования // Нефтегаз. 1998. № 1. С. 165–171.
- Гольдин С.В.** Линейные преобразования сейсмических сигналов. М.: Недра, 1974. 352 с.
- Гольдин С.В.** Двумерные интегральные продолжения волновых полей // Геология и геофизика. 1985. № 5. С. 84–93.
- Денисов М.С.** О возможности обоснования сейсмического принципа взаимности для пластовой модели среды. Часть 2 // Геофизика. 2008. № 4. С. 3–10.
- Денисов М.С.** Алгоритмы сейсмической миграции. Часть 1: Миграция как двухшаговая процедура // Геофизика. 2013. № 1. С. 2–10.
- Денисов М.С., Кузнецов И.К.** Пример использования процедур прямого и обратного продолжений волнового поля при решении задачи подавления кратных волн // Геофизика. 2006. № 4. С. 5–8.
- Денисов М.С., Патрикеев П.В., Фиников Д.Б.** Способы реализации алгоритмов продолжения волновых полей в сложнопостроенных средах // Геофизика. 2011. № 2. С. 3–11.
- Денисов М.С., Силаенков О.А.** Расширение возможностей обработки результатов сейсмических наблюдений за счет использования процедуры продолжения волнового поля // Технологии сейсморазведки. 2008. № 3. С. 3–18.
- Петрашень Г.И., Нахамкин С.А.** Продолжение волновых полей в задачах сейсморазведки. Л.: Наука, 1973. 171 с.
- Подъяпольский Г.С.** Физика упругих волн // Справочник геофизика. М.: Недра, 1966. Т. IV. С. 28–83.
- Рытов С.М.** Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966. 404 с.
- Стретт Дж.В.** Теория звука. М.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1955. Т. 1. 499 с.
- Фиников Д.Б., Шалашников А.В.** Трансформация волновых полей: миграция, погружение, моделирование // Тезисы докладов науч.-практ. конф. “Тюмень – 2013”. Тюмень, 2013.
- Berkhout A.J., Wapenaar C.P.A.** One-way versions of the Kirchhoff integral // Geophysics. 1989. V. 54, N 4. P. 460–467.
- Bleistein N., Cohen J.K., Stockwell J.W.** Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion. N. Y.: Springer, 2000. 510 p.
- Wapenaar C.P.A.** Kirchhoff-Helmholtz downward extrapolation in a layered medium with curved interfaces // Geophys. J. Int. 1993. V. 115, N 2. P. 445–455.

*Поступила 23 апреля 2015 г.,  
в окончательном варианте – 11 мая 2015 г.*

### КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

*ДЕНИСОВ Михаил Сергеевич* – доктор физико-математических наук, директор по науке ООО “ГЕОЛАБ-ИТ”.  
Тел.: +7910433-74-48, e-mail: denisovms@gmail.com