



ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА ТРЕЩИН ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ. ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ

В.А. Левин¹, К.М. Зингерман², А.В. Вершинин¹

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, 1, Россия, e-mail: v.a.levin@mail.ru, versh1984@mail.ru

²Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”
115409, Москва, Каширское шоссе, 31, Россия; e-mail: Zingerman@rambler.ru

Разработана модель возникновения и развития нарушений сплошности пород (повреждений или дефектов). Дефектом считается трещина ненулевого раскрытия. Построение модели развития дефектов основано на аксиоматике механики деформируемых твердых тел. Вводится понятие зоны предразрушения. Она рассматривается как часть твердого тела, в пределах которой его материал изменяет свойства при внешнем воздействии. Авторы используют теорию многократного наложения больших деформаций с учетом критериев прочности. Рассматривается пример решения задачи о росте трещины методом конечных элементов.

Моделирование развития трещин, метод конечных элементов, конечная деформация, критерии прочности

GEOMECHANICAL MODELLING OF FRACTURE PROPAGATION UNDER FINITE STRAINS. PREFRACTURE ZONES

V.A. Levin¹, K.M. Zingerman², A.V. Vershinin¹

¹Lomonosov Moscow State University
119991, Moscow, Leninskiye Gory, 1, Russia, e-mail: v.a.levin@mail.ru, versh1984@mail.ru

²National Research Nuclear University MEPHI
115409, Moscow, Kashirskoe highway, 31, Russia; e-mail: Zingerman@rambler.ru

A model of defect formation and propagation is developed. It is assumed that the defect is a fracture with a nonzero thickness. The axiomatics of mechanics of deformable solid is used for model construction. A concept of a prefracture zone is introduced. The prefracture zone is considered as a part of a solid where the material properties are changed by external forces. The theory of repeated superposition of large deformations and some strength conditions are used. An example of finite element modelling of fracture growth is discussed.

Fracture modeling, Finite element analysis, Finite strains, Strength criteria

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задач механики деформируемых твердых тел обуславливается предположением о сплошности среды. Поэтому образование и развитие нарушений сплошности пород (повреждений или дефектов) можно описывать только при допущении о том, что трещины существовали до нагружения либо возникли в его процессе. Повреждением может считаться трещина ненулевого раскрытия. В рамках обсуждаемой модели понятия трещины и микротрещины аналогичны: и те, и другие являются концентраторами напряжений внутри тела. Учет взаимодействия трещин закономерно требует учета их размеров и расположения относительно граничной поверхности. Отметим, что изучение строения вещества – задача материаловедения, и материал тела не может рассматриваться и изучаться с использованием аппарата механики деформируемых твердых тел. В рамках этой теории термин “трещина” относится к очагу концентрации напряжений, который начинает принудительно менять свою форму (расти, раскрываться) под внешним воздействием при выполнении некоторого условия. Внешнее воздействие также меняет напряженно-де-

формированное состояние нагружаемого тела, и в некоторых случаях эти изменения должны быть заданы (например, при учете конечных деформаций) [Седов, 1962; Лурье, 1980; Левин, 1999; Левин и др., 2004]. Новая форма концентратора напряжений определяется соответствующим механическим критерием либо, в противном случае, задается исследователем; при этом не предполагается лавинообразный рост трещины (т. е. критерий разрушения не выполняется). Например, это может быть форма трещины, поглотившей второстепенную трещину в соответствии с моделью вязкого роста [Бартенев, 1984; Христианович, Баренблатт, 1955, 1968; Христианович, 1981; Шур, 1981].

В качестве критерия прочности обычно используется одно или несколько экспериментальных значений (при этом дополнительно могут быть включены параметры концентратора напряжений, такие как характерный размер дефекта), которые сравниваются с расчетными. Когда значение такого критерия оказывается превышенным, начинается рост существующих трещин. В этом случае необходимо знать форму граничной поверхности трещины в ненагруженном со-

стоянии тела (начальное состояние с точки зрения нелинейной теории упругости) или в текущий / конечный момент выполнения критерия. Данное условие существенно для определения напряженно-деформированного состояния тела, параметры которого входят в критерий прочности. В некоторых моделях принудительного роста трещин (см.: [Левин, 1988, 1999; Левин, Морозов, 2002; Levin et al., 2000]) силы (например, сцепления) могут добавляться или убираться. Внешние силы могут действовать на поверхность трещины (или на ее часть) до или после того, как достигнуто значение критерия прочности. Следует отметить, что при решении задачи определения напряженно-деформированного состояния твердого тела в рамках механики деформируемых твердых тел необходимо учитывать момент начала действия сил. Также следует учитывать форму нагружаемой граничной поверхности. Например, нагрузка может быть приложена в момент, когда начинают действовать все внешние силы, либо в заданный пользователем момент, при условии, что деформация не является малой. В этом случае мы имеем дело с задачей последовательного нагружения тела [Седов, 1962; Черепанов, 1974].

В предложенной модели предполагается, что возникновение и рост дефекта (трещины) происходит мгновенно. Вводится понятие зоны предразрушения; она представляет собой некоторую часть (части) твердого тела, в пределах которой его свойства меняются под воздействием внешних сил. Другими словами, зона предразрушения в твердом теле возникает при превышении критерия прочности, а границы этой зоны определяются выполнением этого критерия. По мнению авторов, наиболее приемлемыми в этом отношении представляются нелокальные критерии прочности. Такие критерии учитывают, что разрушение и изменение свойств вязкоупругого тела в пределах зоны предразрушения происходят не локально и не мгновенно.

Физический смысл такого подхода можно обосновать следующим образом. Поскольку логично предположить, что соседние точки тоже должны быть вовлечены в процесс разрушения, твердое тело не может быть разрушено механически (под воздействием внешних сил) в одной точке. Вследствие неоднородности механического поля (включая вязкоупругие процессы в твердом теле [Седов, 1962; Христианович, 1981]) это воздействие растянуто как во времени, так и в пространстве. Например, для случая малых деформаций было показано (см.: [Морозов, Костенко, 1999]), что попытка усреднения фактора интенсивности нагружения по краю полуэллиптической поверхности трещины в рассматриваемом компоненте среды привела к удовлетворительному соответствию с экспериментом.

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим твердое тело из конечно-деформируемого нелинейного упругого материала. Необходимо заметить, что, например, в случае вязкоупругого твердого тела следует учитывать вязкоупругие процессы в его материале.

На первом этапе построения модели (и ее использования) предлагается описывать изменение свойств твердого тела внутри зоны предразрушения, изменяя только коэффициенты в определяющих со-

отношениях либо сами соотношения. На втором этапе логично рассматривать микропоры и микровключения, возникающие последовательно или одновременно внутри зоны предразрушения. Затем материал этой зоны заменяется материалом с эффективными свойствами на каждом этапе изменения его свойств. Это существенно, например, для эластомеров, в которых происходит кристаллизация под воздействием растяжения при нагружении [Лурье, 1980; Левин, Зингерман, 2002; Левин и др., 2004]. Свойства эффективной среды для случая конечных деформаций можно определить, используя подход, предложенный в работах [Седов, 1962; Kachanov et al., 1994; Levin et al., 1996].

В случае малых деформаций задача роста зоны предразрушения и изменения ее свойств может быть решена при помощи аппарата, разработанного для задач о включениях и для оценки свойств эффективных сред [Бухина, 1973, 1984; Levin et al., 1996; Levin, Zingerman, 2003; Levin, 2008]. Для практических расчетов может быть использовано программное обеспечение для производственного применения. Следует отметить, что главное ограничение в данном случае состоит в возможности определить параметры напряженно-деформированного состояния твердого тела на основе совокупности нагружений как сумму соответствующих параметров на каждом этапе нагружения.

Если зона предразрушения возникает в твердом теле, испытывающем конечные деформации (хотя бы вблизи этой зоны), решение задачи усложняется, но ситуация более точно отражает действительность. Для решения таких проблем применяется аппарат теории многократного наложения больших деформаций с введением понятия программы нагружения. Это понятие, в частности, предполагает, что образование зоны предразрушения (или рост трещин) происходит, как только выбранный критерий начинает выполняться. Процесс не “ждет”, пока все внешние силы достигнут определенных значений (или пока все нагрузки начнут действовать на тело), т. е. он не ждет полного выполнения программы нагружения (которая обычно задается пользователем). Программа нагружения коррелирует с программой (развитием) процесса возникновения и расширения зон предразрушения: деградации материала вплоть до его исчезновения (раскола).

Механическая постановка задачи с использованием нелокального критерия прочности может быть следующей (см.: [Черепанов, 1974; Лурье, 1980; Kachanov, Sevostianov, 2005]). Пусть в процессе нагружения внутри твердого тела возникает некая область, в пределах которой достигается или превышает некое значение критерия. Эта область мысленно убирается, и ее воздействие на остальную часть тела заменяется силами, распределенными по замкнутой поверхности (по принципу ослабления элементов жесткости), что не меняет напряженно-деформированного состояния остальной части тела. Затем полость, образующаяся на месте изъятой области, заполняется упругим материалом с другими свойствами.

Считается, что возникшее включение (которое играет роль зоны предразрушения) совпадает по форме с изъятой частью тела, а силы, действующие на границы включения, противоположны силам, действующим на вновь образованную границу тела. Тогда силы, действующие на границу тела, образованную за счет убранных частей, и на границу зоны предразрушения квазистатистически (например, изотермально),

сводятся к нулю, не вызывая динамических эффектов. Это создает дополнительные большие (как минимум, в окрестности включения) напряжения и деформации, которые накладываются на начальные большие напряжения и деформации, уже существующие в теле и в зоне предразрушения. В терминах теории многократного наложения больших деформаций можно сказать, что тело переходит в следующее состояние.

Затем проводится проверка критериев прочности. Если новая область появилась там, где этот критерий выполняется (или превышен), вышеописанная процедура формирования включения повторяется.

Постановку задачи можно усложнить, предположив, что зона предразрушения возникла на одной из стадий программы нагружения. Если программа продолжается, необходимо учесть возможность возникновения зоны предразрушения с новыми свойствами (например, внутри уже существующей зоны предразрушения). Например, таким изменением свойств тела может стать изменение его плотности.

Ясно, что этот процесс может продолжаться до тех пор, пока не образуется трещина. Образование трещины моделируется посредством удаления части твердого тела на последней стадии развития зоны предразрушения. Изъятие части твердого тела предполагает, например, отделение одной его части от другой или изменение свойств убранный части таким образом, что она перестает взаимодействовать с оставшейся частью тела [Седов, 1962].

На втором этапе построения модели (в ходе которого уточняются свойства материала зоны предразрушения) учитывается, что образование трещины в зоне предразрушения вызывает сложные физико-химические процессы, которые на начальной стадии роста трещины порождают хаотически-разнонаправленные микровключения, которые впоследствии сольются в одну макротрещину. Здесь могут применяться два подхода.

Первый состоит в анализе интерференции и взаимодействия микротрещин и микровключений и позволяет учесть значительные отличия микронапряжений от их среднего значения в зоне предразрушения [Механика разрушения..., 1988–1990]. В этом случае соотношения теории многократного наложения больших деформаций применяются к решению задачи для твердого тела с очагами концентрации напряжений, последовательно возникающими в процессе нагружения [Седов, 1962; Христианович, Баренблатт, 1955, 1968; Христианович, 1981]. Нужно отметить, что при таком подходе возможно решить задачу для системы последовательно или параллельно возникающих микротрещин и их последующего слияния в макротрещину. Задача решается, например, с помощью модели вязкого роста трещин. Такие задачи рассмотрены в трудах Л.И. Седова [1962] и С.А. Христиановича [1981]. Однако, по мнению авторов, такой подход связан с вычислительными сложностями и иногда оказывается нецелесообразным, поскольку положение микротрещин задается исследователем.

Второй подход состоит в замене микротрещиноватого материала зоны предразрушения материалом с эффективными свойствами по методу, описанному в работах [Седов, 1962; Механика разрушения..., 1988–1990; Левин, Морозов, 2007]. Затем решается задача для тела, содержащего зону предразрушения. Кроме того, желательно учесть произвольные расстояния между микротрещинами и их размеры. Отметим также,

что рост трещин в контексте данной модели описывается образованием зоны предразрушения на конце (вершине) трещины.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Здесь представлены основные уравнения теории многократного наложения больших деформаций, необходимые для описания предложенных моделей. Для простоты постановки задачи уравнения приводятся для нелинейного упругого твердого тела. Предполагается, что на границе зоны предразрушения выполняются условия сцепления (равенство соответствующих смещений и напряжений). Система уравнений и граничные условия имеют вид [Черепанов, 1974; Лурье, 1980]

$$\nabla \cdot \sum_{0,m}^n - \sum_{0,m}^n \cdot \nabla \ln(1 + \Delta_{0,m}) + \sum_{0,m}^n \cdot \nabla \Psi_{n,m} \cdot \Psi_{n,m}^{-1} - \left(\nabla \cdot \Psi_{n,m}^{*-1} \cdot \Psi_{n,m}^* \right) \cdot \sum_{n,m}^n = 0 \quad (1)$$

$$\dot{N} \cdot \sum_{0,m}^n = \dot{P}_N^{(m)}, \quad (2)$$

$$\dot{P}_N^m = (1 + \Delta_{0,n}) \left| \frac{d \tau_k^n}{d \tau_k^m} \right| \dot{P}_N^{(n)} \cdot \Psi_{m,n}^{-1},$$

где в уравнении (1)

$$\sum_{0,m}^n = (1 + \Delta_{0,n}) \Psi_{m,n}^* \cdot \sigma_{0,n} \cdot \Psi_{m,n}, \quad (3)$$

$\sigma_{0,n}$ – тензор истинных полных напряжений для m -го состояния (при $m = 1$ $\sigma_{0,1}$ – тензор Коши); $\sum_{0,m}^n$ – тензор обобщенных полных напряжений для m -го состояния, отнесенный к координатному базису n -го состояния; $\Delta_{0,m}$ – относительное изменение объема при переходе тела из начального в m -е состояние; $\Psi_{m,n} = \Psi_{0,m}^{-1} \cdot \Psi_{0,n}$ – соответствующий градиент деформаций [Лурье, 1980; Левин, 2001]; $\Psi_{m,n} = e^i e_i^n$; $e_i^n = \frac{\partial r^n}{\partial s^i}$; r^n – радиус-вектор частицы в n -м состоянии; $\xi^i J$ – лагранжевы координаты частицы; $r^n - r^{n-1} = u_n$, u_n – вектор перемещений, характеризующий перемещение из предыдущего ($n - 1$)-го состояния в последующее n -е состояние. Причем

$$\Psi_{q,p} = I + \sum_{n=q+1}^p \nabla u_n = \left(I - \sum_{n=q+1}^p \nabla u_n \right)^{-1}, \quad (4)$$

$$\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial s^i}.$$

В (1)–(4) и далее знак над символом означает номер состояния, в котором задана или к которому отнесена данная величина (кроме r и ε). В (2) $\dot{P}_N^{(n)}$ – вектор истинных напряжений на площадке $d \tau_k^n = \dot{N} \left| d \tau_k^n \right|$.

Знак * используется для обозначения операции транспонирования. Граничные условия над границей твердого тела (матрицы) и зоны предразрушения (включения) на основе k -го состояния имеют вид

$$(\bar{N}_n \cdot \bar{\Sigma}_{0,n} |_{\Gamma_n}^k) |_{matrix} = (\bar{N}_n \cdot \bar{\Sigma}_{0,n} |_{\Gamma_n}^k) |_{prefracture\ zone}, \quad (5)$$

$$\left(\bar{u}_n |_{\Gamma_n}^k \right) |_{matrix} = \left(\bar{u}_n |_{\Gamma_n}^k \right) |_{prefracture\ zone}. \quad (6)$$

При расчете можно использовать как сжимаемый материал Мурнагана [Levin, 1998]

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_{0,n}^0 &= \lambda(\bar{E}_{0,n} \cdot I)I + 2G\bar{E}_{0,n}^0 + 3C_3(\bar{E}_{0,n} \cdot I)^2 I + \\ &+ C_4(\bar{E}_{0,n} \cdot I)I + 2C_4(\bar{E}_{0,n} \cdot I)\bar{E}_{0,n}^0 + 3C_5(\bar{E}_{0,n}^0)^2, \quad (7) \\ \bar{E}_{0,n}^0 &= \frac{1}{2}(\Psi_{0,n} \cdot \Psi_{0,n}^* - I), \quad (8) \end{aligned}$$

так и несжимаемые материалы Трелоара и Муни–Ривлина [Levin, 1998, 2008].

В соотношениях (7) и (8) в общем случае $\bar{E}_{m,n}^m$ – тензор деформаций, описывающий изменение деформаций при переходе из m -го в n -е состояние и отнесенный к координатному базису n -го состояния [Лурье, 1980; Levin et al., 2004] (отметим, что при $m > n$ меняется порядок нижних индексов в записи $\bar{E}_{m,n}^m$, входящем в первое слагаемое).

$$\bar{E}_{q,p}^\gamma = \frac{1}{2}(\Psi_{\gamma,p} \cdot \Psi_{\gamma,p}^* - \Psi_{\gamma,q} \cdot \Psi_{\gamma,q}^*), \quad \Psi_{\gamma,p} = \Psi_{p,\gamma}^{-1} \quad (9)$$

при $p = \gamma = 1, \quad q = 0 \quad \bar{E}_{0,1}^1$ – тензор Альманси.

КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ

Для определения зоны предразрушения можно использовать различные критерии. По мнению авторов, наиболее приемлемыми в данном случае являются нелокальные критерии прочности. Принимается во внимание, что изменение свойств материала тела в зоне предразрушения и дальнейшее разрушение в ее пределах происходят в конечной области и не мгновенно [Седов, 1962; Левин, 1999]. Поэтому нелокальный критерий прочности заключает в себе не только величины параметра прочности (назовем его V_k ; как правило, это – функция компонентов тензора деформаций Коши или Альманси), но и параметр, описывающий размер расчетной области.

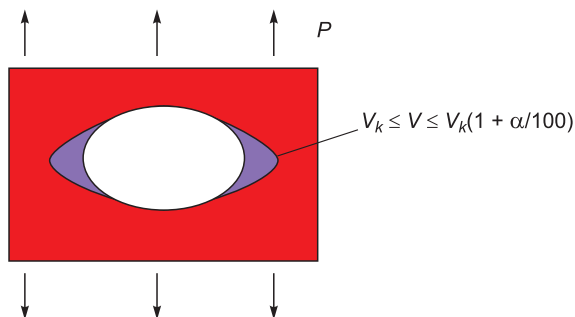


Рис. 1. Возникновение зон предразрушения в окрестности полости.

В работе [Левин, 1999] предложен нелокальный критерий прочности при условии конечных деформаций для твердых тел из упругих и вязкоупругих материалов. Этот критерий полезен для анализа вязкого роста трещин (критерий Левина–Морозова).

Заметим, что критерии разрушения, основанные на осреднении их значений в пространстве или во времени (но не для конечных деформаций и вязкоупругих тел), известны (см., напр.: [Черепанов, 1974; Леонов, 1981; Механика разрушения..., 1988–1990; Левин, 2001]). Первым критерием такого вида является, вероятно, критерий Вигарда [Левин, Морозов, 2002].

В качестве объяснения ниже описывается простейший нелокальный критерий прочности для зоны предразрушения и разрушения (рис. 1). Нелокальный критерий представляет собой локальный критерий $V = V_k$, примененный к зоне предразрушения для определения этой области (зоны) и для задания такого значения превышения параметра прочности (α %), при котором в “опасной точке” мгновенно возникает зона предразрушения. Также предполагается, что в области, ограниченной изолинией, величина критерия V превышает предельное значение V_k не более чем на α %. По этой изолинии условие прочности справедливо для локального критерия $V = V_k$ (в замкнутой области внутри изолинии $V_k \leq V \leq V_k(1 + \alpha/100)$).

Степень разрушения задается внутри области, ограниченной этой изолинией. Например, может предварительно задаваться пористость материала Δr как отражение разрушения или образования микровключений. Материал зоны предразрушения приобретает другие (эффективные) свойства, при этом образованию зон с новыми свойствами ведет к перераспределению напряжений и деформаций в теле, в результате чего меняется форма зоны предразрушения.

Далее мы меняем (на некоторую заданную величину Δr) внешнюю нагрузку (или добавляем новую) согласно программе нагружения и определяем соответствующее напряженно-деформированное состояние. Затем, как и на первом этапе, проверяем выполнение нелокального критерия в исходном материале, с определением новой границы зоны предразрушения. Внутри этой зоны находим зону предразрушения следующего уровня, с использованием того же нелокального критерия прочности (конечно, если он выполнялся) (рис. 2).

В пределах этой новой зоны предразрушения свойства материала изменяются (например, пористость возрастает на величину Δr_1). Возникновение новой зоны с новыми свойствами закономерно приводит к перераспределению напряжений и деформаций в теле.

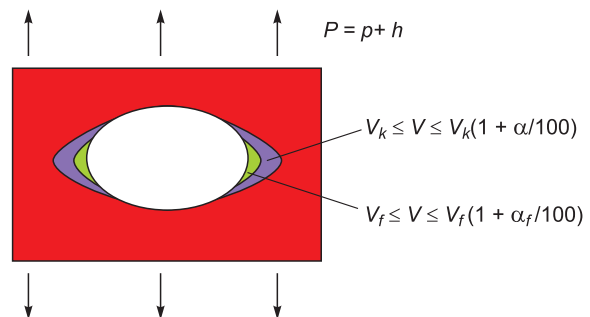


Рис. 2. Возникновение зон предразрушения второго уровня в окрестности полости.

В дальнейшем нагружение продолжается, все стадии повторяются и зоны предразрушения определяются по описанной выше схеме. Например, пористость может одновременно расти от стадии к стадии, пока

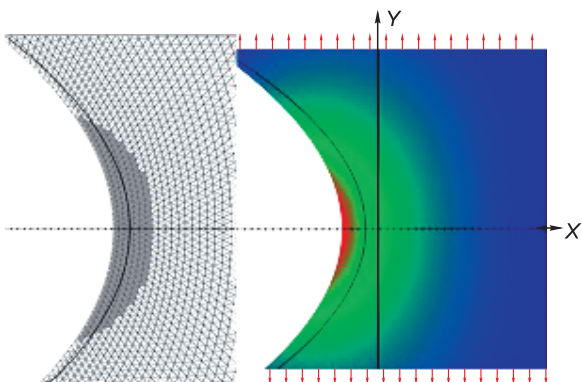


Рис. 3. Форма трещины и распределение напряжений у ее конца в момент возникновения первой зоны предразрушения.

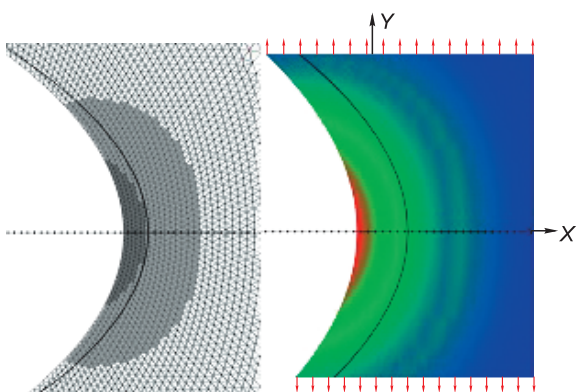


Рис. 4. Форма трещины и распределение напряжений у ее конца в момент возникновения второй зоны предразрушения.

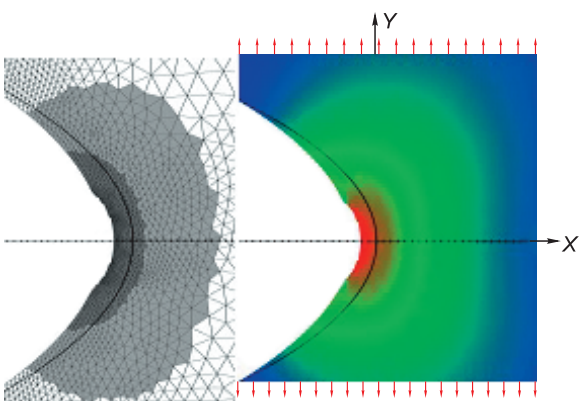


Рис. 5. Форма трещины и распределение напряжений на заключительной стадии.



Рис. 6. Рост трещины и появление дополнительных пор.

не достигнет предельного значения в последней зоне предразрушения (на заключительной стадии). Достижение предела пористости в последней зоне предразрушения означает исчезновение (раскол) материала. Обычно это происходит по границе дефекта (трещины).

Внешняя нагрузка может далее возрасти в ходе расширения зон предразрушения и прогрессирующего раскола. Заметим, что в данной модели зоны предразрушения образуются и меняются мгновенно, и поэтому возможные уточнения могут быть связаны только с их “физическим”, а не с “вычислительным” аспектом.

ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В качестве модельной задачи, иллюстрирующей описанный подход, рассмотрена плоская задача роста эллиптического отверстия при одноосном растяжении ($\sigma_{0,11}^{\infty} = 0$, $\sigma_{0,12}^{\infty} = p$). Расчеты проводились методом конечных элементов с использованием пакета программ CAE Fidesys [www.Cae-Fidesys.com]. Нелинейный упругий материал твердого тела описывается потенциалом Мурнагана ($\lambda/G = 2.097$, $C_3/G = -0.0689$, $C_4/G = -0.37464$, $C_5 = 0.33709$ [Христианович, 1981]). В ненагруженном теле существовала эллиптическая трещина с раскрытием (отношением полуосей) $a/b = 7$. Предполагается образование двух зон предразрушения. Первая зона возникает при значении критерия прочности $V_k/G = 0.84072$ ($\alpha = 0.05$), достигаемом при нагрузке $p/G = 0.04$. Внутри зоны открываются микропоры (пористость $p = 0.06$). Эффективные свойства среды определялись с помощью методов, позволяющих рассчитать эффективные свойства и их распределение при конечных деформациях (см.: [Лурье, 1980; Левин, 1988; Levin, 1998]). Вторая зона предразрушения образуется внутри первой, когда выполнена программа нагружения при $V_k/G = 1.16706$ с нагрузкой $p/G = 0.052$ ($\alpha = 0.05$). Предполагается, что внутри второй зоны предразрушения открываются дополнительные поры (пористость $p = 0.09$). Естественно, первая зона предразрушения развивается. Далее, при выполнении программы нагружения с $V_k/G = 1.455566$ (при нагрузке $p/G = 0.0676$), происходит раскол тела.

На рис. 3 и 4 представлены форма трещины и характер соответствующей концентрации напряжения на момент образования первой и второй зон предразрушения; на рис. 5 показана заключительная стадия. Зона предразрушения показана серым цветом (вторая зона темнее, чем первая); сплошная линия обозначает границу трещины в начальном состоянии тела. Отметим, что сравнение результатов решения данной задачи и задачи, в которой не учитывались образование зон предразрушения и принудительный рост трещины (раскол), показало снижение уровня напряжений на вершине дефекта на 15–25 % в случае, если образование зон предразрушения на разных стадиях нагружения входит в условия задачи.

На рис. 6 приведен пример роста трещины и появления дополнительных пор.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена геомеханическая модель роста трещин в рамках механики твердого тела. Предполагается, что начальная трещина существует в сплошной упругой среде и растет при увеличении внешнего воздействия (нагрузки). Как представляется, данная геомеханическая модель и численный алгоритм, предло-

женные в статье, применимы к описанию роста трещин гидроразрыва. Такие трещины имеют небольшую, но конечную ширину и плавно закрываются на концах. Накачка флюида внутрь трещины увеличивает внутреннее давление на ее границе и вызывает дополнительные деформации в предварительно-напряженном теле. Рост трещины происходит, когда нарушаются некоторые критерии прочности в области окрестности дефекта. Эти критерии могут быть нелокальными, и рост трещин моделируется как поэтапный процесс [Левин, Морозов, 2007; Levin, 2008]. Этот процесс может быть описан в рамках теории многократного наложения больших деформаций с учетом критериев прочности. Результаты численного моделирования методом конечных элементов получены с использованием программного обеспечения CAE FIDESYS [www.Cae-Fidesys.com].

Авторы благодарны профессору Е.М. Морозову за многочисленные консультации. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-08-01191 и 13-01-12043).

Литература

- Бартев Г.М.** Прочность и механизм разрушения полимеров. М.: Химия, 1984. 280 с.
- Бухина М.Ф.** Кристаллизация каучуков и резин. М.: Химия, 1973. 239 с.
- Бухина М.Ф.** Техническая физика эластомеров. М.: Химия, 1984. 224 с.
- Левин В.А.** О концентрации напряжений вблизи отверстия, образованного в предварительно напряженном теле из вязкоупругого материала // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299, № 5.
- Левин В.А.** Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. М.: Наука; Физматлит, 1999. 224 с.
- Левин В.А.** О “физическом разрезе”, привнесенном в предварительно нагруженное упругое тело. Конечные деформации // Доклады РАН. 2001. Т. 343, № 5. С. 572–578.
- Левин В.А., Зингерман К.М.** О построении эффективных определяющих соотношений для пористых упругих материалов при конечных деформациях и их наложении // Доклады РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 482–487.
- Левин В.А., Морозов Е.М.** Нелокальный критерий прочности. Конечные деформации // Доклады РАН. 2002. Т. 86, № 1. С. 62–67.
- Левин В.А., Морозов Е.М.** Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях // Доклады РАН. Физика. 2007. Т. 415, № 7. С. 52–54.
- Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко И.Г.** Избранные нелинейные задачи механики разрушения. М.: Физматлит, 2004. 407 с.
- Леонов М.Я.** Механика деформаций и разрушения. Фрунзе: Илим, 1981. 236 с.
- Лурье А.И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- Механика разрушения и прочность материалов:** Справ. пособ.: В 4 т. / под ред. В.В. Панасюка. Киев: Наук. думка, 1988–1990.
- Морозов Е.М., Костенко П.В.** Метод сечений для расчета натуральных деталей с трещинами // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1999. № 7. С. 31–34.
- Седов Л.И.** Введение в механику сплошной среды. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 284 с.
- Христианович С.А.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981. 483 с.
- Христианович С.А., Баренблатт Г.И.** Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1955. № 11. С. 73–86.
- Христианович С.А., Баренблатт Г.И.** О модуле сцепления в теории трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 2. С. 70–75.
- Черепанов Г.П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- Шур А.М.** Высокомолекулярные соединения. М.: Высш. школа, 1981. 420 с.
- Kachanov M., Sevostianov I.** On quantitative characterization of microstructures and effective properties // Intern. J. Solid. Struct. 2005. V. 42. P. 309–336.
- Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro V.** Effective properties of solids with randomly located defects / Probabilities and Materials / Ed. by D. Breusse. Kluwer Publ., 1994. P. 225–240.
- Levin V.A.** Theory of repeated superposition of large deformations. Elastic and viscoelastic bodies // Intern. J. Solid. Struct. 1998. V. 35, N 20. P. 2585–2600.
- Levin V.A.** The construction of a model of the growth of a defect for finite strains: Non-local criteria // J. Appl. Math. Mech. 2008. V. 72, N 3. P. 306–311.
- Levin V., Kachanov M., Lokhin V., Zingerman K.** Effective response of porous materials undergoing large deformations // 19th Int. Congr. Theor. and Appl. Mech.: Abstr. Kyoto, 1996. P. 262.
- Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M.** Effective elastic properties of porous materials with randomly disposed pores. Finite deformation / Trans. ASME (The American Society of Mechanical Engineers) // J. Appl. Mech. 2000. V. 67, N 4. P. 667–670.
- Levin V.A., Zingerman K.M.** Effective constitutive equations for porous elastic materials at finite strains and superimposed finite strains / Trans. ASME (The American Society of Mechanical Engineers) // J. Appl. Mech. 2003. V. 70, N 6.
- www.cae-fidesys.com** – официальный сайт инжиниринговой компании “Фидесис” (Москва).

*Поступила 20 октября 2014 г.,
в окончательном варианте – 4 декабря 2014 г.*

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

ЛЕВИН Владимир Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Тел.: (495)939 18 34, e-mail: v.a.levin@mail.ru

ЗИНГЕРМАН Константин Моисеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры компьютерного инженерного моделирования МИФИ. Тел.: (499)324 84 41, доб. 119, e-mail: Zingerman@rambler.ru

ВЕРШИННИН Анатолий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Тел.: (495)939 18 34, e-mail: versh1984@mail.ru