



## ВЛИЯНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА КАЧЕСТВО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ

К.Г. Гадыльшин<sup>1</sup>, В.А. Чеверда<sup>2</sup>, Д.А. Неклюдов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет  
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Россия; e-mail: gadylshin@gmail.com

<sup>2</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН  
630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия  
e-mail: cheverdava@ipgg.sbras.ru, NeklyudovDA@ipgg.sbras.ru

Геологическое строение перспективных на нефть и газ территорий, особенно в условиях Восточной Сибири, характеризуется сложной верхней частью разреза, которая существенно влияет на качество сейсмических волновых изображений и решение обратной динамической задачи сейсмики. Наиболее полную информацию об этом влиянии можно получить, проанализировав структуру оператора прямой задачи, т. е. оператора, который переводит заданную модель среды в волновое поле для выбранной системы наблюдения. В настоящей статье рассматривается структура такого оператора для двух сценариев решения обратной задачи: верхняя часть разреза известна точно, следовательно, точно известна и структура полного волнового поля, связанного с ней, а значит, и поле кратных волн; известна гладкая составляющая (скоростная модель) верхней части разреза, что не позволяет учесть заранее структуру кратных волн. На примере серии численных экспериментов анализируются преимущества и недостатки каждого из сценариев.

*Обращение полных волновых полей, SVD-анализ, разрешающая способность, устойчивость, гауссов шум, свободная поверхность, кратные волны*

### FREE SURFACE EFFECT ON THE QUALITY OF THE SOLUTION OF THE INVERSE DYNAMICAL PROBLEM OF SEISMIC

K.G. Gadylshin<sup>1</sup>, V.A. Tcheverda<sup>2</sup>, D.A. Neklyudov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Novosibirsk State University  
630090, Novosibirsk, Pirogova st., 2, Russia; e-mail: gadylshin@gmail.com

<sup>2</sup>Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS  
630090, Novosibirsk, Acad. Koptyug prosp., 3, Russia  
e-mail: cheverdava@ipgg.sbras.ru, neklyudovda@ipgg.sbras.ru

The geological structure of prospective oil and gas areas, particularly in Eastern Siberia, is characterized by a complex near surface. Naturally, it has a significant impact on the quality of seismic images and the solution of FWI. The most complete information about this influence can be obtained by analyzing the structure of the forward map – the operator that translates a given model of the environment in the wave field for selected acquisition. In this paper we examine the structure of forward map for the two scenarios of the inverse problem: the upper part of the model is known exactly and, thus, the structure of the full wave field associated with it is accurately known, and, hence, the field of multiples is known; smooth component (propagator) of the upper part of the model is known, therefore the structure of the multiples are not taken into account. A series of numerical experiments demonstrates the advantages and disadvantages of each scenario.

*Full wave from inversion, SVD analysis, resolution, stability, Gaussian noise, free surface multiples*

### ВВЕДЕНИЕ

Вклад верхней части разреза (ВЧР) необходимо учитывать и при определении структурных особенностей реконструкции геологической среды (форма и расположение границ раздела), и при определении ее сейсмических параметров (обратная динамическая задача). Искажение результатов, полученных при использовании неточной модели приповерхностных слоев, может быть весьма значительным и приводить к существенным ошибкам как в глубинах, так и в форме целевых горизонтов, не говоря уже о корректности восстановления латеральной изменчивости параметров [Козырев и др., 2003; Евдокимов и др., 2006].

В связи с этим восстановление строения верхней части среды является одним из наиболее востребованных среди широкого круга сейсмических исследований. Можно утверждать, что к настоящему времени она представляет собой довольно развитую область сейсморазведки, в которой используется разнообразный набор методов и приемов. Перечислим лишь основные известные нам способы ее решения:

– решение обратной кинематической задачи с последующим вводом полученных статических поправок. Решение здесь строится для приповерхностных слоев с целью вычислить необходимые временные

сдвиги в исходные сейсмограммы, что позволяет избежать искусственного искривления целевых горизонтов и обеспечить корректную фокусировку волновых сейсмических изображений [Li, Luo, 2003; Коротков, Козырев, 2011];

- применение методов сейсмической томографии на рефрагированных лучах для реконструкции скоростного строения приповерхностной зоны и его последующее использование при расчете статических поправок и построении волновых сейсмических изображений целевых горизонтов [Li, Luo, 2003; Zhang W., Zhang J., 2011];

- определение скоростной структуры ВЧР с использованием поверхностных волн [Socco et al., 2010; Piatti et al., 2013];

- методы обращения полных волновых полей с ориентацией на ВЧР [Shen et al., 2012; Bretonneau et al., 2013].

Как видно, выбор подходов, ориентированных на реконструкцию строения ВЧР, довольно богат. Поэтому мы не будем предлагать какой-либо новый или усовершенствованный метод. Наша основная цель – понять, насколько знание тонкой приповерхностной структуры повышает качество изображений целевых глубинных горизонтов. Точнее, может ли корректный учет кратных волн, образованных на свободной поверхности, повысить качество решения обратной динамической задачи сейсмоки, включая в том числе и построение изображений в истинных амплитудах.

Во многом наше исследование инициировано серией публикаций об использовании кратных волн для повышения разрешающей способности и информативности результатов сейсмических исследований (см. достаточно полную библиографию в работе [Berkhout et al., 2012]). Мы же ограничимся изучением метода обращения полных волновых полей, точнее, его реализацией для двух сценариев – учитывающего и не учитывающего наличие кратных волн.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что изучаемый волновой процесс описывается скалярным уравнением Гельмгольца для двумерно неоднородной среды (см. Прил. 1). Все рассмотрение будет проводиться на примере модели, представленной на рис. 1, а. Данная модель характе-

ризуется значительными латеральными вариациями, а также заметными контрастами по вертикали, что и обеспечивает возникновение в ней интенсивных кратных волн.

Для этой модели выполняется конечно-разностное моделирование волнового поля в области временных частот для системы многократного перекрытия. При этом используется следующая геометрия источников и приемников: неподвижные 496 приемников, расположенные на глубине 5 м от линии  $z = 0$  с шагом 20 м, и 33 источника, равномерно размещенные на этой же линии с шагом 300 м.

Моделирование выполнено для двух различных условий на верхней границе (линия  $z = 0$ ):

- свободная граница  $\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$ ; (1)

- в области  $z < 0$  расположен поглощающий слой (*perfectly matched layer*, PML) (см. [Grote, Sim, 2010]).

Тем самым в первом случае будут возникать интенсивные кратные волны, связанные со свободной поверхностью, в то время как во втором случае таких волн нет. Следовательно, используя разные граничные условия, мы сможем оценить вклад кратных волн в качество решения обратной задачи.

### МЕТОД

Напомним теперь, как выполняется обращение полных волновых полей. Прежде всего для этого необходимо определить оператор решения прямой задачи (см. Прил. 1)

$$F: M \rightarrow D, \quad (2)$$

который переводит пространство моделей  $M$  в пространство данных  $D$ . В этих терминах обратная динамическая задача построения скоростной модели по имеющимся данным сводится к решению нелинейного операторного уравнения:

$$d^{obs} = F(m_{true}). \quad (3)$$

Для его отыскания можно, в частности, использовать метод Ньютона и его различные модификации, когда искомая модель  $m_{true}$  строится как предел последовательности  $\{m_k\}$  решений линейных оператор-

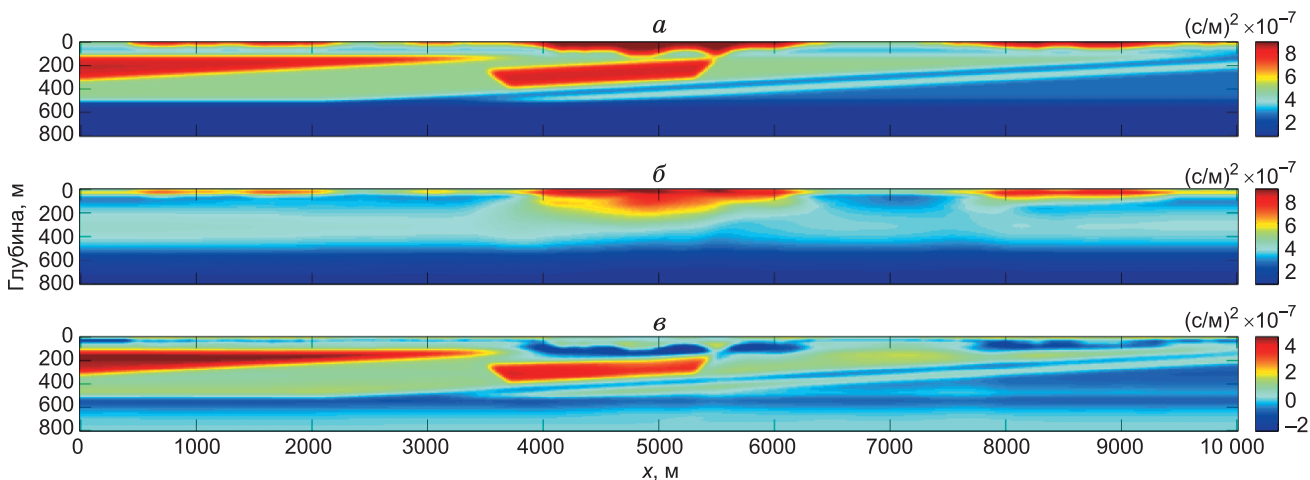


Рис. 1. Полная модель (а), начальное приближение (б), искомое возмущение (в).

Модель описывается квадратом величины, обратной скорости распространения волн (медленности).

ных уравнений первого рода (см., напр., [Канторович, Акилов, 1984])

$$\frac{\delta F}{\delta m}(m_k) < m_{k+1} - m_k > = d^{obs} - F(m_k). \quad (4)$$

О построении производной оператора прямой задачи по модели среды см. Прил. 2.

В случае, когда начальное приближение  $\{m_0\}$  уже достаточно близко к точному решению  $m_{true}$ , соотношение (4) можно рассматривать как линейное операторное уравнение на возмущение  $\delta m = m_{true} - m_0$ , которое после дискретизации задачи может быть сведено к системе линейных алгебраических уравнений

$$A \delta m = \delta u (= d^{obs} - F(m_0)), \quad (5)$$

матрица которой составлена из частных производных исходного нелинейного оператора  $F$  по модели.

На практике начальная модель для процедуры обращения полных волновых полей берется как результат решения обратной кинематической задачи (кинематической томографии) с использованием первых вступлений. Для рассматриваемой постановки она приведена на рис. 1, б. Искомое возмущение, т. е. разность между “истинной” и начальной моделями, показано на рис. 1, в.

Хорошо известно, что уточнение скоростного строения среды с помощью обращения полных волновых полей происходит только при использовании низких частот, содержащихся во входных данных. В данном случае обращение производится одновременно для четырех частот – 2.5, 5, 7.5, 10 Гц. Предполагается, что каждая частотная компонента имеет равный вклад, что исключает влияние формы импульса зондирующего сигнала.

Как было отмечено выше, входные данные для обоих сценариев вычислялись с использованием конечно-разностного решения уравнения Гельмгольца (A1), а в полученные данные вносился белый гауссовский шум, такой, что отношение сигнал / помеха равно 15 дБ.

Поскольку решение интегрального уравнения первого рода является некорректной задачей, то матрица  $A$  соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (5) будет плохо обусловленной. Здесь необходимо подчеркнуть, что чем точнее аппроксимация, тем хуже обусловленность этой матрицы<sup>1</sup>. Следовательно, численное решение системы уравнений (5) невозможно без использования регуляризующей процедуры, в качестве которой мы выбрали усечение сингулярного разложения [Tcheverda, Kostin, 1995; Костин, Черверда, 1997, 2010]. Остановимся кратко на ее описании.

### Регуляризация путем усечения сингулярного разложения

Пусть после выполнения конечно-разностной аппроксимации интегрального уравнения первого рода получена система линейных алгебраических уравнений (5), которую запишем в несколько иной форме:

$$A < \delta \bar{m} > = \delta \bar{d},$$

где  $A : R^n \rightarrow R^m$ ,  $\delta m \in R^n$  и  $\delta d \in R^m$ . Для любой матрицы  $A$  может быть построено сингулярное разложение

$$A = U \Sigma V^*, \quad (6)$$

где  $U$  – ортогональная матрица  $m \cdot m$ ,  $\Sigma$  – диагональная матрица порядка  $m \cdot n$  с неотрицательными вещественными числами на диагонали, расположенными в невозрастающем порядке,  $V$  – ортогональная матрица порядка  $n \cdot n$ , а  $V^*$  – транспонированная к  $V$ . Под диагональной прямоугольной матрицей здесь понимается такая матрица, в которой все элементы вне главной диагонали равны нулю:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

причем  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ . Столбцы матриц  $U$  и  $V$  образуют соответственно левые и правые сингулярные векторы. Правые сингулярные векторы  $\{v_i\}_{i=1}^n$  формируют базис пространства моделей, тогда как левые сингулярные векторы  $\{u_i\}_{i=1}^m$  – базис пространства данных, причем

$$\begin{aligned} A < v_i > &= \sigma_i u_i, \\ A^* < u_i > &= \sigma_i v_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Регуляризованный обратный оператор ( $r$ -обратный) строится как

$$A_r^{-1} = V \Sigma_r^{-1} U^*, \quad (9)$$

где  $\Sigma_r^{-1}$  – матрица порядка  $n \cdot m$ , у которой отличны от нуля только первые  $r$  диагональных элементов. Другими словами, такая регуляризация заключается в решении линейной задачи не во всем пространстве моделей, а лишь в его подпространстве  $V_r = span(v_1, \dots, v_r)$ , натянутом на  $r$  старших правых сингулярных векторов. В роли регуляризирующего параметра  $r$  выступает размерность пространства  $V_r$ . Ошибка в решении усеченной системы  $\delta m_r^{err}$ , ее число обусловленности  $\mu(A_r) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$  и ошибка в данных

$\delta d_r^{err}$  связаны следующей оценкой:

$$\begin{aligned} A_r < \delta m_r > &= \delta d_r, \\ \frac{\delta m_r^{err}}{\delta m_r} \frac{v_r}{v_r} &\leq \mu(A_r) \frac{\delta d_r^{err}}{\delta d_r} \frac{u_r}{u_r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, исходя из заданного уровня погрешности и желаемой точности численного решения, можно не только оценить размерность  $r$  устойчивого подпространства моделей, но и получить его полное

<sup>1</sup> Действительно, исходный оператор компактен, поэтому имеет сингулярные числа, стремящиеся к нулю.

описание, используя для этого правые сингулярные векторы  $v_1, \dots, v_r$ . В частности, проектируя конкретную скоростную модель на соответствующую линейную оболочку правых сингулярных векторов, можно заранее сказать, какая ее составляющая будет восстанавливаться устойчиво.

На практике размерность устойчивого подпространства моделей  $r \ll \max(m, n)$ , поэтому вычисление полного набора сингулярных векторов является нецелесообразным по двум причинам:

- в случае двумерно неоднородной вмещающей среды для построения матрицы системы (5) в явном виде необходимо выполнить огромное количество расчетов волновых полей (пропорционально числу точек в целевой области);

- даже в двумерном случае размерность пространства моделей может быть очень большой и требовать колоссальных объемов оперативной памяти.

### Численная реализация

Для сокращения объема вычислений был использован итерационный метод построения старших сингулярных чисел и соответствующих им сингулярных векторов, не требующий явного задания матрицы [Hernandez et al., 2005, 2008]. Его реализация выполнена с использованием специализированной библиотеки SLEPc (*Scalable Library for Eigenvalue Problem Computations*), ориентированной на высокопроизводительные вычислительные системы с параллельной архитектурой (см.: <http://www.grycap.upv.es/slepc/>). Для проведения вычислений необходимо задать параметр  $r$ , т. е. размерность устойчивого пространства, и иметь подпрограмму, вычисляющую действие матрицы  $A$  на произвольный вектор.

Такая подпрограмма была создана на основе конечно-разностного решения уравнения Гельмгольца. При этом для каждой частоты из заданного диапазона строится  $LU$ -разложение матрицы, определяемой конечномерной аппроксимацией оператора Гельмгольца. После получения  $LU$ -факторов для всех частот процедура итерационного отыскания собственных векторов сводится к некоторому набору прямых и обратных подстановок.

### Выбор параметра регуляризации $r$

Остановимся подробнее на выборе параметра регуляризации  $r$ . При решении практических задач выбор оптимального параметра регуляризации весьма нетривиален. Эта проблема хорошо изучена, ей посвящено множество публикаций (обзор может быть найден, например, в монографии [Vogel, 2002]). Как итог, предложен ряд подходов, которые могут оказаться приемлемыми в тех или иных ситуациях. Однако сам факт их многообразия свидетельствует о том, что не существует эффективного способа, годного “на все случаи жизни”.

В рассматриваемой постановке ситуация значительно упрощается, так как подразумевается, что правильное решение известно, а основной целью является сравнение эффективности разных сценариев решения обратной задачи. Разные сценарии сравниваются с точки зрения получения “наилучшего” результата, достижимого при помехе заданного уровня [Silvestrov et al., 2012]. Определить, что есть “наилучший” результат, можно сравнивая получаемое решение с известной правильной моделью по некоторому критерию.

Для каждого сценария обращения полного волнового поля при заданном уровне помехи существует оптимальное значение параметра регуляризации (число обусловленности усеченной системы (10)), при котором достигается минимум среднеквадратической ошибки (*mean-squared error, MSE*) между восстановленными параметрами модели и их правильными значениями. Критерий оценки результатов обращения для разных сценариев основан на этой величине. Модели, построенные при оптимальном значении  $r$ , можно назвать “наилучшими достижимыми моделями”. Среднеквадратическая ошибка представляется как сумма двух слагаемых:

$$MSE = \text{trace}[\text{cov}(\delta m_r)] + \|m_{true} - Rm_{true}\|^2 = V^2 + B^2. \quad (11)$$

Первое слагаемое – след матрицы ковариации модели – описывает дисперсию параметров модели, т. е. устойчивость их определения:

$$[\text{cov}(\delta m_r)] = A_r^{-1}[\text{cov}(\delta d_r)](A_r^{-1})^*, \quad (12)$$

где  $\text{cov}(\delta d_r)$  обозначает матрицу ковариации данных, которая определяет статистические свойства помехи (см. [Menke, 1994]). Второе слагаемое – разрешенность восстановленных параметров, здесь  $R$  означает матрицу разрешающей способности, которая строится как

$$R = A_r^{-1} A_r. \quad (13)$$

Для иллюстрации эффективности восстановления целевого объекта при разных сценариях наблюдений мы используем величину, называемую относительной среднеквадратичной ошибкой (*Relative Mean Square Error, RMSE*):

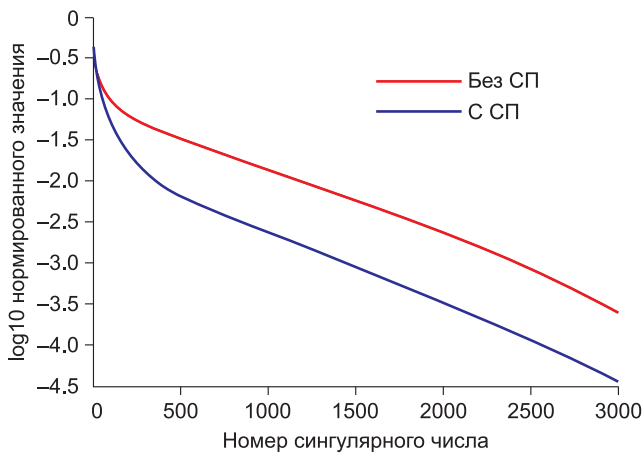
$$RMSE = MSE / \|m_{true}\|^2 = V^2 / \|m_{true}\|^2 + B^2 / \|m_{true}\|^2 \quad (14)$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

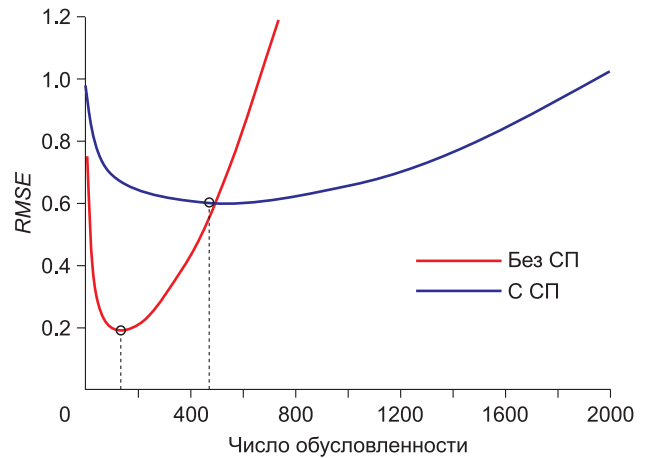
На рис. 2 приведено поведение нормализованных собственных чисел матрицы  $A$  для двух сценариев – со свободной поверхностью (СП) и с поглощающим слоем. В случае без СП собственные числа убывают с ростом индекса гораздо медленнее, чем в случае со свободной поверхностью. Это означает, что теоретически в первом случае нужно ожидать более высокую информативность результата инверсии (для заданного уровня помех можно использовать более высокую размерность устойчивого подпространства).

На рис. 3 приводится зависимость относительной среднеквадратической ошибки решения от значения параметра регуляризации  $r$  при обращении данных с заданной помехой. Результат обращения полного волнового поля без учета кратных волн, образованных на СП, позволяет получать лучший результат (минимальная  $RMSE$ ) для оптимально выбранного параметра регуляризации. Однако этот сценарий заметно менее устойчив к выбору регуляризации, а именно: если параметр регуляризации выбран неоптимальным образом,  $RMSE$  быстро возрастает и превосходит ошибку, полученную с учетом образования кратных волн на свободной поверхности. Это особенно заметно для больших значений параметра  $r$ . Результаты линеаризованного обращения для двух сценариев при  $r = 140$  представлены на рис. 4.

Как было сказано, сценарий без учета кратных волн со свободной поверхности позволяет получить приемлемое качество восстановленных параметров. Если



**Рис. 2.** Нормированные сингулярные числа в логарифмическом масштабе для случая со свободной поверхностью и без нее.

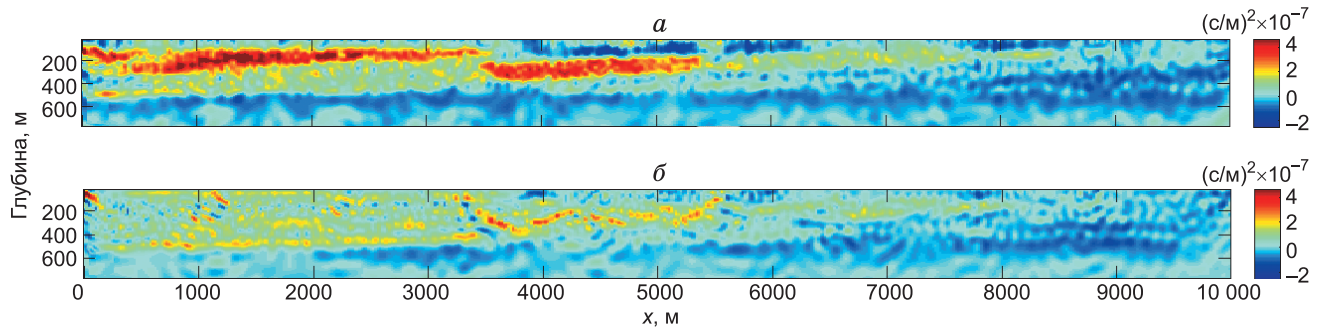


**Рис. 3.** Зависимость относительной среднеквадратичной ошибки ( $RMSE$ ) от регуляризации для случая со свободной поверхностью и без нее.

регуляризация неоптимальна, результат применения процедуры обращения полного волнового поля без СП становится неустойчивым и дает результат с весьма низким разрешением. В то же время сценарий со свободной поверхностью имеет весьма широкий диапазон допустимых значений параметра регуляриза-

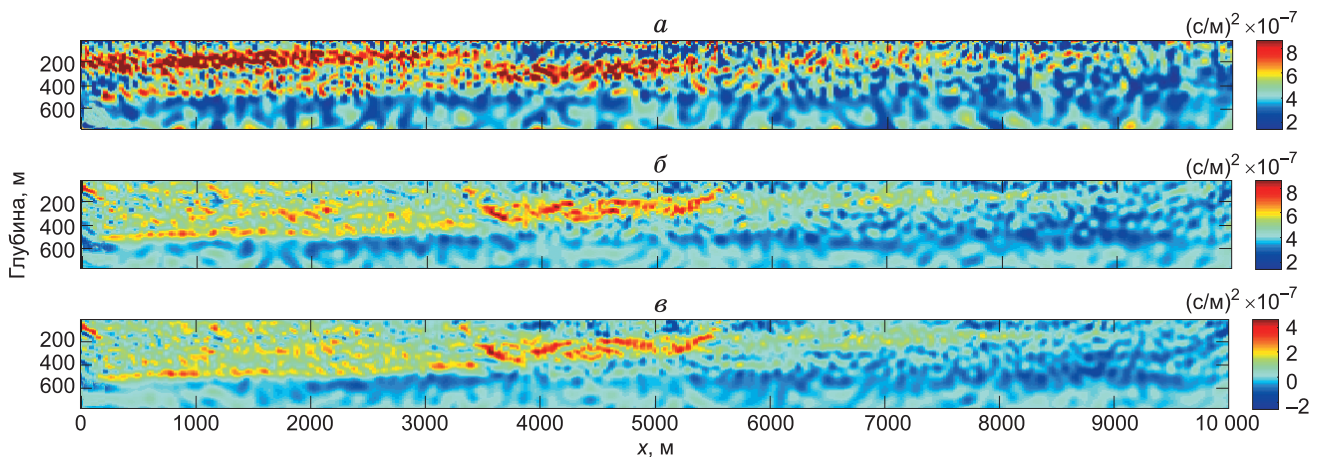
ции. При любом значении из этого интервала будут получаться практически одинаковые результаты, хотя и заметно уступающие по разрешенности наилучшему достижимому результату в первом сценарии.

Действительно, как видно из рис. 5, использование оптимального для свободной поверхности пара-



**Рис. 4.** Обращение на основе усеченного SVD для  $r = 140$  (а) без кратных от свободной поверхности, (б) с учетом кратных, образованных на свободной поверхности.

Выбранная регуляризация оптимальна для сценария без свободной поверхности (см. рис. 3).



**Рис. 5.** Обращение на основе усеченного SVD для  $r = 650$  (а) без кратных от свободной поверхности, со свободной поверхностью (б), обращение для  $r = 500$  со свободной поверхностью (в) (выбранная регуляризация оптимальна для сценария со свободной поверхностью; см. рис. 3).

метра регуляризации  $r = 500$  для модели, не учитывающей наличия кратных волн, приводит практически к полному разрушению изображения (см. рис. 5, а). В то же время использование параметра регуляризации  $r = 650$ , который заметно отличается от оптимального, практически никак не меняет изображения для модели, учитывающей наличие кратных волн. Таким образом, учет кратных волн заметно повышает устойчивость алгоритма, хотя и снижает разрешающую способность получаемого изображения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен подход, основанный на детальном изучении оператора прямой задачи и обеспечивающий сравнение различных сценариев метода обращения полных волновых полей. Разработанная нами методика позволяет производить сравнительный анализ информативности, разрешающей способности и устойчивости к помехам различных методов выполнения обращения полных волновых полей, а также оценивать влияние на качество реконструкции строения среды системы возбуждения и регистрации сейсмических волн. На этой основе удалось показать, что привлечение кратных волн, связанных со свободной поверхностью, снижает разрешающую способность и информативность получаемых результатов, но увеличивает их устойчивость в присутствии некоррелированных помех. Аналогичным образом развитый математический аппарат может быть применен для исследования влияния ряда других параметров, например минимальной частоты, максимального выноса, геометрии системы наблюдения и других важных параметров, на результаты обращения полного волнового поля.

К сожалению, в работе не упомянут цикл работ В.М. Глоговского и его учеников, связанных с оригинальным подходом к учету влияния верхней части разреза на основе применения процедур прямого и обратного продолжения волновых полей (см. [Денисов, Силаенков, 2008] и приведенную там библиографию). Мы благодарны М.С. Денисову, указавшему на возможности этой группы методов, но данная статья ориентирована на конкретную проблему – изучение влияния свободной поверхности на качество реконструкции скоростного строения среды, получаемого в результате обращения полного волнового поля.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-05-00076, 13-05-12051, 14-05-31257, 14-05-00049, 14-05-93090) и при государственной поддержке молодых российских ученых (грант Президента РФ МК-2909.2014.5). Вычисления проводились на вычислительных мощностях Сибирского суперкомпьютерного центра СО РАН, Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН, суперкомпьютеров СКИФ МГУ “Чебышев” и “Ломоносов”.*

### Приложение 1

#### ОПЕРАТОР РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть  $c(x)$  – скорость распространения волн в двумерной среде. В дальнейшем нам удобнее использовать не скорость, а величину  $m = c^{-2}(x)$ , которую и будем называть моделью и писать  $m \in M$ , подразуме-

вая под  $M$  некоторое пространство моделей. Пусть функция  $u(x; \omega)$  (волновое поле в области временных частот) удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + \omega^2 m)u = -f \quad (A1)$$

с правой частью  $f(x)$  и угловой частотой  $\omega$ . Поведение на бесконечности этого решения определяется принципом предельного поглощения [Эйдус, 1962; Вайнберг, 1966]:

$$u = \lim_{s \rightarrow +0} u_s; (\Delta + (\omega + i\varepsilon)^2 m)u_s = -g; \\ u_s \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty. \quad (A2)$$

Под оператором прямой задачи  $\mathcal{F}_f(m; \omega)$  будем понимать отображение, ставящее в соответствие функции  $m$  решение уравнения (A1). Когда правая часть этого уравнения имеет вид  $g(x; \omega) = f(\omega)\delta(x - x_s)$ , соответствующий оператор будем обозначать  $\mathcal{F}_{x_s}(m; \omega)$ . Заметим, что фактически результат действия этого оператора совпадает с произведением спектральной характеристики импульса  $f(\omega)$  и функции Грина  $G(x, x_s; \omega; m)$ .

Волновое поле в области временных частот\* есть комплекснозначная функция положения точки  $x$  и частоты  $\omega$ . Обратная задача состоит в определении скоростной модели среды по волновому полю, зарегистрированному в конечном наборе точек в  $R^2$ , в которых расположены сейсмоприемники. Введем в рассмотрение линейный оператор, вычисляющий взятие следа полного волнового поля от одного из источников на фиксированной временной частоте в точках, соответствующих расположению приемников:

$$P : U \rightarrow C^{NR}, \quad (A3)$$

где  $NR$  – количество приемников. Если используется всего  $NS$  источников с координатами  $x_i$ , то пространство данных для каждого из них на фиксированной частоте  $\omega_j$  определяется действием следующего оператора, переводящего элемент  $m$  из пространства моделей в вектор из пространства  $C^{NR}$ :

$$F_i^j(m) = P \circ \mathcal{F}_{x_i}(m; \omega_j). \quad (A4)$$

Далее также будем пользоваться компактной записью

$$F(m) = \begin{pmatrix} F^1(m) \\ \vdots \\ F^{Nf}(m) \end{pmatrix}, \quad (A5)$$

где  $F^j : M \rightarrow C^{NS \times NR}$  такой, что

$$F^j(m) = \begin{pmatrix} F_1^j(m) \\ \vdots \\ F_{NS}^j(m) \end{pmatrix}. \quad (A6)$$

Окончательно получаем следующий оператор решения прямой задачи:

$$F : M \rightarrow D, \quad (A7)$$

где пространство данных  $D = C^{Nf \times NS \times NR}$ .

\* В дальнейшем просто “волновое поле”.

**ПЕРВАЯ ФОРМАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ**

Пусть  $h_m \in M$  – малое возмущение модели  $m$  (мы не уточняем, в каком смысле понимается малость, так как будет рассматриваться формальная производная), а  $u$  и  $u + \delta u$  – решения уравнения Гельмгольца для коэффициентов  $m$  и  $m + h_m$  на частоте  $\omega$ :

$$(\Delta + \omega^2 m)u = f(\omega)\delta(x-x_s),$$

$$(\Delta + \omega^2(m + h_m))(u + \delta u) = f(\omega)\delta(x-x_s) \quad (A8)$$

С использованием функции Грина получим интегральное уравнение для определения  $\delta u$ :

$$\delta u(x) = \omega^2 \int_{R^2} G(x,y;\omega;m)h_m(y)(u(y) + \delta u(y))dy, \quad (A9)$$

которое может быть переписано в виде стандартного уравнения Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} \delta u(x) - \omega^2 \int_{R^2} G(x,y;\omega;m)h_m(y)\delta u(y)dy = \\ = \omega^2 \int_{R^2} G(x,y;\omega;m)h_m(y)u(y)dy. \end{aligned} \quad (A10)$$

При выполнении ряда ограничений его решение представляется в виде ряда Неймана. Ограничиваясь первым членом этого ряда, получим

$$\delta u(x) = \omega^2 \int_{R^2} G(x,y;\omega;m)h_m(y)u(y)dy + o(\|h_m\|_M). \quad (A11)$$

Это соотношение дает линейный оператор, связывающий малое приращение искомого параметра  $m$  с изменчивостью решения уравнения и, следовательно, он является первой производной (формальной) нелинейного оператора прямой задачи:

$$\begin{aligned} \delta u(x) = \frac{\delta \mathcal{F}_x}{\delta m} (m;\omega) \langle h_m \rangle + o(\|h_m\|_M) = \\ = \omega^2 \int_{R^2} G(x,y;\omega;m)h_m(y)u(y)dy + o(\|h_m\|_M). \end{aligned} \quad (A12)$$

В случае, когда правая часть уравнения Гельмгольца равна  $f(\omega)\delta(x-x_s)$ , формальная производная оператора прямой задачи представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}_x}{\delta m} (m;\omega) \langle h_m \rangle = \\ = \omega^2 f(\omega) \int_{R^2} G(x,y;\omega;m)G(y,x_s;\omega;m)h_m(y)dy. \end{aligned} \quad (A13)$$

Окончательное выражение для производной оператора решения прямой задачи  $\frac{\delta F}{\delta m}$  легко получить, используя следующую формулу:

$$\frac{\delta F_i^j}{\delta m} = P \circ \frac{\delta \mathcal{F}_{x_i}}{\delta m} (m; \omega_j), \quad (A14)$$

где мы воспользовались линейностью оператора взятия следа  $P$ .

**Вайнберг Б.Р.** Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1966. Т. 21, вып. 3(129). С. 115–194.

**Денисов М.С., Силаенков О.А.** Расширение возможностей обработки результатов сейсмических наблюдений за счет использования процедуры продолжения волнового поля // Технологии сейсморазведки. 2008. № 3. С. 3–18.

**Евдокимов А.А., Жерняк Г.Ф., Сысоев А.П.** Анализ влияния неоднородностей ВЧР на оценки кинематических параметров отраженных волн // Геология, геофизика и разработка нефтегазовых месторождений. 2006. № 10. С. 48–58.

**Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

**Козырев В.С., Жуков А.П., Коротков И.П. и др.** Учет неоднородностей верхней части разреза в сейсморазведке. М.: Недра, 2003. 227 с.

**Коротков И.П., Козырев В.С.** Применение метода интерактивной коррекции статических поправок для повышения достоверности геологической интерпретации // Технологии сейсморазведки. 2011. № 2. С. 13–22.

**Костин В.И., Чеверда В.А.**  $r$ -решения уравнения первого рода с компактным оператором в гильбертовых пространствах: существование и устойчивость // Доклады РАН. 1997. Т. 355, № 3. С. 308–312.

**Костин В.И., Чеверда В.А.**  $r$ -псевдообратный для компактного оператора // Сибирские электронные матем. известия. 2010. Т. 7. С. 258–282.

**Эйдус Д.М.** О принципе предельного поглощения // Математический сборник. 1962. Т. 57(99), № 1. С. 13–44.

**Berkhout G., Verschuur D., Blacquiere G.** Illumination properties and imaging promises of blended, multiple-scattering seismic data: a tutorial // Geophys. Prospect. 2012. V. 60. P. 713–732.

**Brethoudeau F., Brossier R., Leparoux D. et al.** 2D elastic full-waveform imaging of the near-surface: application to synthetic and physical modeling data sets // Near Surf. Geophys. 2013. V. 11, N 3. P. 307–316.

**Grote M.J., Sim I.** Efficient PML for the wave equation // arXiv:1001.0319v1 [math.NA]. 2010. 2 Jan.

**Hernandez V., Roman J.E., Vidal V.** SLEPc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems // ACM Trans. Math. Software. 2005. V. 31, N 3. P. 351–362.

**Hernandez V., Roman J.E., Tomas A.** A robust and efficient parallel SVD solver based on restarted Lanczos bidiagonalization // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 2008. V. 31. P. 68–85.

**Li L.M., Luo S.X.** The tomographic inversion static correction on complex three-dimensional surface model // Oil Geophys. Prosp. 2003. V. 38, N 6. P. 636–641.

**Menke W.** Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory. Academic Press, 1994.

**Piatti C., Socco L.V., Boiero D., Foti S.** Constrained 1D joint inversion of seismic surface waves and P-refraction traveltimes // Geophys. Prosp. 2013. V. 61. P. 77–93.

**Shen X., Tonellot T., Luo Y. et al.** A new waveform inversion workflow: Application to near-surface velocity estimation in Saudi Arabia // SEG Annual Meeting. Las Vegas, USA, 2012. Expanded abstracts.

**Silvestrov I., Neklyudov D., Puckett M., Tcheverda V.** Resolution and stability analysis of offset VSP acquisition scenarios with applications to full-waveform inversion // 82nd

SEG Annual Meeting. Las Vegas, USA, 2012. Extended abstracts.

**Socco L.V., Jongmans D., Boiero D., Stocco S., Maraschini M., Tokeshi K., Hantz D.** Geophysical investigation of the Sandalp rock avalanche deposits // Journal of Applied Geophysics. 2010. V. 70. P. 277–291/

**Tcheverda V., Kostin V.** *R*-pseudoinverse for compact operator in Hilbert spaces: existence and stability // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1995. V. 3, N 2. P. 131–148.

**Vogel C.** Computational methods for inverse problems. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 2002.

**Zhang W., Zhang J.** Full waveform tomography with consideration for large topography variations // SEG Annual Meeting. San Antonio, 2011. P. 2539–2542.

*Поступила в редакцию 8 сентября 2014 г.,  
в окончательном варианте – 11 сентября 2014 г.*

#### КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

*ГАДЬЛЬШИН Кирилл Геннадьевич* – аспирант Новосибирского национального исследовательского государственного университета.

*НЕКЛЮДОВ Дмитрий Александрович* – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории численных методов обращения геофизических полей Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН.

*ЧЕВЕРДА Владимир Альбертович* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом вычислительных методов геофизики Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН.