



РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СРЕДАХ С НАЧАЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ. КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ПРОЧНОСТНОГО ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА FIDESYS

В.А. Левин, А.В. Вершинин, И.А. Мишин, А.М. Сбойчаков, К.А. Петровский

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Россия,
va.levin@mail.ru, versh.1984@mail.ru, contact@fidesys-cae.com, mathtyper@gmail.com, contact@fidesys-cae.com*

Рассмотрены постановка и решение задачи распространения упругих волн в нелинейно-упругом массиве с начальными, вообще говоря конечными, деформациями. Учитывается, что распространение упругих волн приводит к возникновению больших дополнительных деформаций, которые физически накладываются на уже имеющиеся в теле. Для постановки задачи используется теория многократного наложения больших деформаций.

Распространение нелинейно-упругих волн, анизотропия, большие деформации, компьютерное моделирование, начальные деформации

ELASTIC WAVE PROPAGATION IN NON-LINEAR MEDIA WITH INITIAL STRESSES. COMPUTER MODELING IN CAE FIDESYS

V.A. Levin, A.V. Vershinin, I.A. Mishin, A.M. Sboychakov, K.A. Petrovskiy

*Lomonosov Moscow State University,
119991, Moscow, Lininskie gori, MSU, 1, Main building, mechanical-mathematical faculty, Russia, e-mail: va.levin@mail.ru,
versh.1984@mail.ru, contact@fidesys-cae.com, mathtyper@gmail.com, contact@fidesys-cae.com*

The article considers formulation and solution of a elastic wave propagation problem in the non-linear media with initial strains, being finite in general case. It takes into account that elastic waves propagation involves large additional strains, imposed physically on the ones, existing already. The theory of superimposed large strains is used for the problem setting.

Non-linear waves propagation, anisotropy, large strains, computer modeling, initial strains

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в нелинейно-упругом массиве, находящемся в начальном (ненапряженном) состоянии, под воздействием внешних нагрузок возникли большие плоские статические деформации. Тело перешло в первое промежуточное состояние. Далее к нему прикладывается сила, являющаяся источником упругих колебаний, которая приводит к распространению в теле упругих волн. При этом в нем происходит локальное изменение напряженно-деформированного состояния в точках распространения возмущений. Далее предполагается, что эти силы изменяются мгновенно или по заданному закону на большую величину, например уменьшаются до нуля. Такое изменение поверхностных сил вызывает появление в теле дополнительных больших (по крайней мере, в окрестности вновь образованной граничной поверхности) деформаций. При малых деформациях возможна их суперпозиция, т. е. параметры напряженно-деформированного состояния тела от суммарного внешнего воздействия на него определяются как сложение этих параметров от каждого воздействия на тело. При конечности деформаций это не так.

Так как распространение упругих волн происходит в теле, уже имеющем конечные деформации, это

приводит к возникновению дополнительных деформаций, для решения задачи используется теория многократного наложения больших деформаций [Левин и др., 2007]. Ниже приводятся основные выражения этой теории, определяющие уравнение движения:

$$\nabla \left[(1 + \Delta_{0,n})^{-1} \sum_{0,n+1}^n(t) \cdot \Psi_{n,n+1}(t) \right] - \rho \frac{d^2 u_{n+1}(t)}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

где ∇ – градиент в n -м состоянии; $\Delta_{0,n}$ – относительное изменение объема при переходе из начального состояния в n -е состояние; $\sum_{0,n+1}^n(t)$ – тензор обобщенных (полных для n -го состояния) напряжений, определенный в координатном базисе n -го состояния; $\Psi_{n,n+1}(t)$ – аффинор деформаций, накопленных на предыдущих состояниях, описывает переход тела из n -го состояния в $(n + 1)$ -е состояние; ρ – плотность материала; $u_{n+1}(t) = \mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n$ – вектор перемещений, характеризующий переход из n -го состояния в $(n + 1)$ -е состояние; \mathbf{r}^n – радиус-вектор частицы в n -м состоянии.

Начальные условия:

$$u_{n+1}(0) = u_n, \quad \frac{du_{n+1}}{dt}(0) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\sigma_{0,n+1}(t)|_{\infty} = \sigma_{0,n+1}^{\infty}(t),$$

$$\left. \bar{N}_{n+1}(t) \cdot \sum_{0,n+1}^n(t) \right|_{\Gamma_{n+1}^k(t)} = \quad (3)$$

$$= -P(t)(1 + \Delta_{0,n+1}(t)) \cdot \bar{N}_{n+1}(t) \cdot \Psi_{n,n+1}^{*-1}(t) \cdot \Psi_{n,n+1}(t),$$

где $\sigma_{0,n+1}(t)$ – тензор истинных напряжений, накопленных в теле при переходе из начального в n -е состояние; \bar{N}_{n+1} – нормаль; $P(t)$ – давление на границе; * – знак транспонирования.

Нелинейные эффекты в поведении материала упругого тела при различных видах нагружений и разгрузок [Работнов, 1977], особенно при приложении больших нагрузок, могут быть учтены путем задания нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями, т. е. вводом физической нелинейности в дифференциальную постановку задачи. Примером такой связи может служить потенциал Мурнагана [Левин и др., 2007], связывающий тензор обобщенных напряжений с тензором деформаций. Легко заметить, что из определяющих соотношений для материала Мурнагана путем отбрасывания всех нелинейных по компонентам тензора деформаций членов (содержащих константы второго порядка) получается широко применяемый в сейсмоземлетрясениях закон Гука. Определяющие соотношения для материала Мурнагана приведены ниже:

$$\begin{aligned} \sum_{0,n+1}^0(t) &= \lambda \left(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t) : I \right) I + 2G \overset{0}{E}_{0,n+1}(t) + \\ &+ 3C_3 \left(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t) : I \right)^2 I + C_4 \left(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t)^2 : I \right) I + \\ &+ 2C_4 \left(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t) : I \right) \overset{0}{E}_{0,n+1}(t) + 3C_5 \left(\overset{0}{E}_{0,n+1}(t) \right)^2, \\ \sum_{0,n+1}^0(t) &= \\ &= (1 + \Delta_{0,n+1}(t)) \cdot \Psi_{n,n+1}^{*-1}(t) \cdot \sigma_{0,n+1}(t) \cdot \Psi_{n,n+1}^{-1}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_{0,n+1}(t) = (1 + \Delta_{0,n+1}(t))^{-1} \Psi_{0,n+1}^*(t) \cdot \sum_{0,n+1}^0(t) \cdot \Psi_{0,n+1}(t),$$

$$\overset{0}{E}_{0,n+1}(t) = \frac{1}{2} (\Psi_{0,n+1}(t) \cdot \Psi_{n,n+1}^*(t) - I),$$

где λ , G – константы Ламе линейной теории упругости; C_3 , C_4 , C_5 – константы второго порядка; $\overset{0}{E}_{0,n+1}(t)$ – тензор деформаций, описывающий изменение деформаций при переходе тела из начального состояния в $(n+1)$ -е состояние и отнесенный к координатному базису начального состояния; I – единичный тензор; $\Psi_{0,n+1}(t)$ – аффинор деформаций, накопленных на предыдущих состояниях, описывает переход тела из начального состояния в $(n+1)$ -е состояние; “:” – знак двойной скалярной свертки.

Геометрические соотношения:

$$1 + \Delta_{0,n+1}(t) = \det \Psi_{0,n+1}(t),$$

$$\Psi_{0,n+1}(t) = \Psi_{0,n} \cdot \Psi_{n,n+1}(t)$$

$$\Psi_{n,n+1}(t) = I + \overset{n}{\nabla} u_{n+1}(t), \quad (5)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{|\Psi_{0,n}|},$$

где ρ_0 – начальная плотность тела.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение представленной системы дифференциальных уравнений (1) будем искать с помощью метода конечных элементов (МКЭ) в совокупности с методом Галеркина [Левин, Зингерман, 2002]. Перепишем исходную дифференциальную постановку (1) в виде слабой формулировки [Zienkiewicz, Taylor, 1971]. С учетом граничных условий и применения формулы Грина она принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \forall i: \int_{\Omega} N_i \cdot \left[\overset{n}{\nabla} \left[(1 + \Delta_{0,n})^{-1} \sum_{0,n+1}^n(t) \cdot \Psi_{n,n+1}(t) \right] - \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \right] d\Omega = \\ = \forall i: \int_{\Omega} N_i \cdot \overset{n}{\nabla} \left[(1 + \Delta_{0,n})^{-1} \sum_{0,n+1}^n(t) \cdot \Psi_{n,n+1}(t) \right] d\Omega - \\ - \int_{\Omega} N_i \cdot \rho \frac{d^2 u}{dt^2} d\Omega = \\ = \forall i: \int_{\Omega} \left[N_i \cdot \rho \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \nabla N_i (1 + \Delta_{0,n})^{-1} \cdot \sum_{0,n+1}^n(t) \cdot \Psi_{n,n+1}(t) \right] d\Omega - \\ - \int_{\Gamma} N_i \cdot \sigma^{\infty} \cdot \bar{n} d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где Ω – область, занимаемая телом; N_i – интерполяционная функция; \bar{n} – нормаль к границе тела Γ .

Аппроксимация неизвестных перемещений \bar{u} функциями N_i :

$$\bar{u}(t) \approx \bar{\bar{u}}(t) = \sum_{k=1}^{K_m} N_k \cdot \bar{u}_k(t),$$

где N_k – интерполяционные функции; K_m – число узлов сетки; $\bar{u}_k(t)$ – неизвестные узловые перемещения. После подстановки данных разложений в (6) получаем следующую галеркинскую систему уравнений:

$$M \frac{d^2 \bar{\bar{u}}}{dt^2} + K(\bar{\bar{u}}) - f = 0. \quad (7)$$

Здесь $\bar{\bar{u}}$ – вектор неизвестных узловых перемещений размерности $2K_m$, а коэффициенты уравнения (7) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Omega} N^T \cdot \rho \cdot N d\Omega, \\ K(\bar{\bar{u}}) &= \\ &= \int_{\Omega} \nabla N^T \cdot \left[(1 + \Delta_{0,n}(\bar{\bar{u}}))^{-1} \cdot \sum_{0,n+1}^n(\bar{\bar{u}}) \cdot \Psi_{n,n+1}(\bar{\bar{u}}) \right] d\Omega, \quad (8) \\ f &= \int_{\Gamma} N^T \cdot \sigma^{\infty} \cdot \bar{n} d\Gamma, \end{aligned}$$

где N – вектор, составленный из функций N_k .

Заметим, что нелинейность в (7) присутствует только по самим перемещениям, а не по их производным. Данное обстоятельство позволяет применять хорошо известные методы решения динамических задач линейной теории упругости. Для решения полученной системы (7) будем использовать дискретизацию по времени по методу SS22 (Single Step algorithm of 2-nd order approximation for 2-nd order equation – метод приближения уравнения второго порядка одношаговым алгоритмом второго порядка точности по времени) [Zienkiewicz, Taylor, 2005]. Данный метод является методом второго порядка точности по времени. В работе [Zienkiewicz, Taylor, 2005] также рассматривается возможность применения аналогичного по своим характеристикам метода GN22 (Generalized Newmark algorithm of 2-nd order approximation for 2-nd order equation – метод приближения уравнения второго порядка обобщенным алгоритмом Ньюмарка вто-

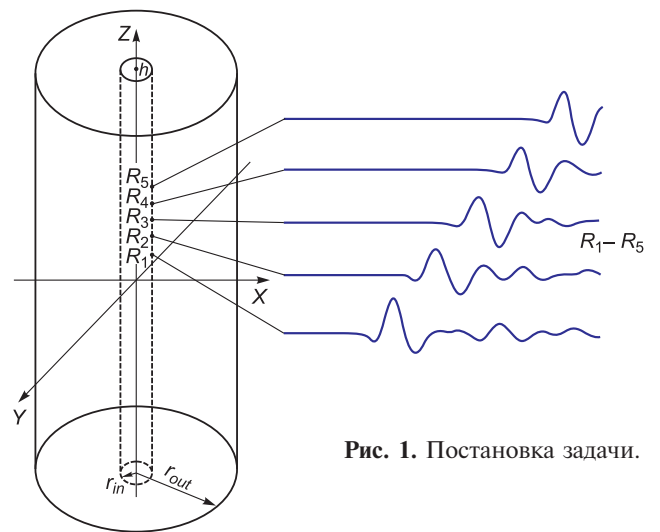


Рис. 1. Постановка задачи.

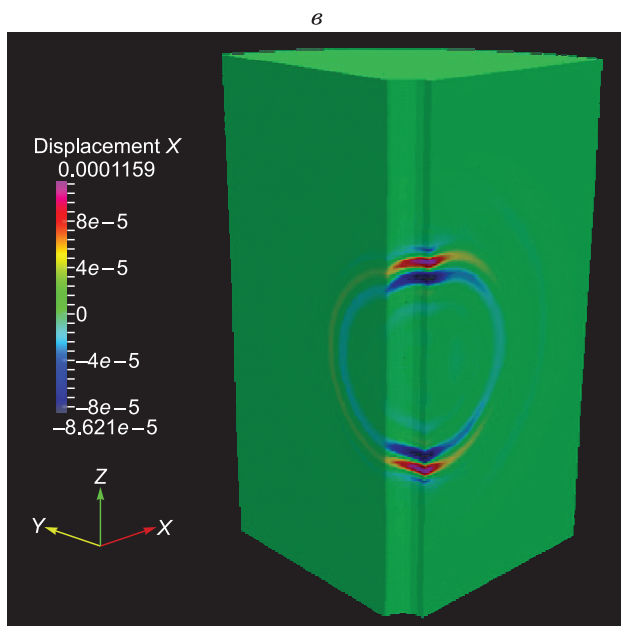
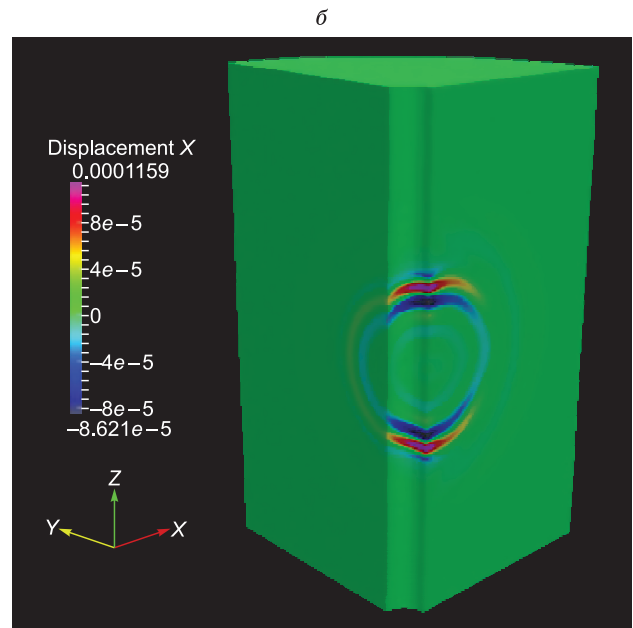
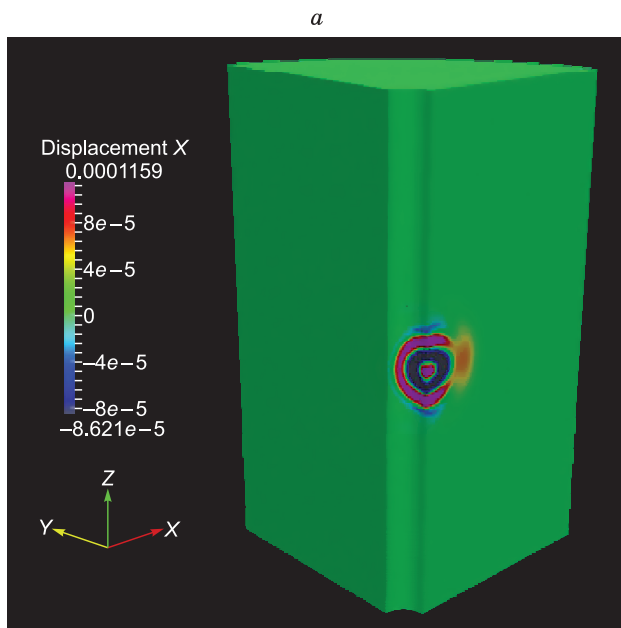


Рис. 2. Распределение поля модуля перемещений U в момент времени $t = 4.75$ (а), $t = 9.5$ (б), $t = 14.25$ (в).

рого порядка точности по времени). Предположим, что нам известно решение задачи на n -м шаге по времени \bar{u}_n . Тогда на $(n + 1)$ -м шаге будем искать его в следующем виде:

$$\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + \frac{d\bar{u}_n}{dt} \cdot \tau + \alpha \cdot \frac{\tau^2}{2}, \quad (9)$$

где $\tau = t_{n+1} - t_n$; α – неизвестный вектор-поправка.

Подставляя данное представление в (7) и записывая его для некоторого момента времени в промежутке от t_n до t_{n+1} , получаем:

$$M \cdot \alpha + K \left(\bar{u}_{n+1} + \frac{\theta_2}{2} \cdot \tau^2 \cdot \alpha \right) - f = 0, \\ \bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + \theta_1 \cdot \tau \cdot \frac{d\bar{u}_n}{dt}. \quad (10)$$

Здесь θ_1 и θ_2 – весовые коэффициенты. После решения системы нелинейных уравнений (10) методом Ньютона и нахождения α находим \bar{u}_{n+1} , $\frac{d\bar{u}_{n+1}}{dt}$ по формуле (9). Безусловная устойчивость данного метода гарантирована при $\theta_2 \geq \theta_1$, $1 \geq \theta_1 \geq \frac{1}{2}$ [Zienkiewicz, Taylor, 2005]. В качестве шага по времени рекомендуется брать минимальный характерный размер элемента, поделенный на скорость движения упругой волны [Zienkiewicz, Taylor, 2005].

Данный алгоритм реализован в программном комплексе FIDESYS на основе МКЭ. Приближенное решение системы нелинейных алгебраических уравнений, получаемых из конечно-элементного рассмотрения, находится методом итераций Ньютона–Канторовича [Левин, Зингерман, 2002].

Приведем результаты решения модельной задачи. Для удобства расчеты будут проводить в относительных (безразмерных) величинах.

На полый цилиндр (рис. 1) высотой 10, внешним радиусом 1 и внутренним радиусом 0.1 из материала Мурнагана [Левин и др., 2007] ($\lambda/G_{\text{мат}} = 2.1$, $G/G_{\text{мат}} = 1$, $C_3/G_{\text{мат}} = -0.07$, $C_4/G_{\text{мат}} = -0.37$, $C_5/G_{\text{мат}} = 0.34$, $\rho = 2200$), на его верхнюю грань действует направленная вниз вдоль оси цилиндра распределенная нагрузка, которая приводит к возникновению в цилиндре начальных деформаций.

В качестве распределения внешней силы возьмем точечную силу, создающую в зависимости от момента времени возмущение среды $\varphi(t)$ в точке $x^i(0,0,0)$ в направлении $n^i(0-1,0)$.

Источник возмущений брался в следующем виде:

$$\varphi(t) = A_m \frac{\omega_1^2 e^{-\omega_1 t}}{4} \times \\ \times \left(\sin(\omega_0 t) \left(-\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \left(\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right), \quad (11) \\ A_m = 2 \cdot 10^{-7}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \quad f_0 = 10^3.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Результаты расчетов, демонстрирующие распределение поля модуля перемещений U в различные моменты времени t , представлены на рис. 2. Видно, что наличие в среде начальных напряжений приводит к различным значениям модуля перемещений при распространении возмущений от источника вдоль и поперек оси сжатия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный в работе подход позволяет численно решать задачи распространения упругих волн в нелинейно-упругом нагруженном массиве с начальными, вообще говоря конечными, деформациями. Этот подход развивает модели, предложенные В.А. Левиным и Е.М. Морозовым [Левин и др., 2004].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России по государственному контракту от 15.06.2012 г. № 07.524.11.4019, Фонда Сколково.

Литература

- Левин В.А., Зингерман К.М.** Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272 с.
- Левин В.А., Морозов Е.М., Матвиенко Ю.Г.** Избранные нелинейные задачи механики разрушения / Под ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2004. 408 с.
- Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В.** Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: Физматлит, 2007. 392 с.
- Работнов Ю.Н.** Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The finite element method. The basis: McGraw-Hill, London, 1971. V. 1. 707 p.; V. 2. 807 p.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.** The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals (6th Ed.). Elsevier, 2005. V. 1. 804 p.

Поступила в редакцию 13 декабря 2012 г., в окончательном варианте – 30 декабря 2012 г.

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

ЛЕВИН Владимир Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной механики Московского государственного университета.

ВЕРШИНИН Анатолий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной механики Московского государственного университета.

МИШИН Иван Андреевич – кандидат физико-математических наук, заместитель генерального директора ООО “ФИДЕСИС”.

СБОЙЧАКОВ Алексей Максимович – соискатель ИФЗ РАН.

ПЕТРОВСКИЙ Константин Александрович – программист-алгоритмист ООО “ФИДЕСИС”.