



ПРИРОДА НЕУСТОЙЧИВОСТИ БЛОЧНЫХ СРЕД И НЕКОТОРЫЕ СЦЕНАРИИ РАЗВИТИЯ КАТАСТРОФ

Б.П. Сибиряков

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3, Россия, e-mail: SibiryakovBP@ipgg.nsc.ru*

В логарифмическом масштабе зависимость между удельной поверхностью и числом неустойчивых решений уравнений движения близка к зависимости энергия–число землетрясений. Этот закон не имеет чисто сейсмологической специфики. Явления, предвещающие катастрофические процессы, – это промежуточные состояния между статикой и динамикой.

Интегральная геометрия, закон повторяемости, метастабильные состояния

THE NATURE OF BLOCKED MEDIA INSTABILITIES AND SOME CATASTROPHIC SCENARIOS

B.P. Sibiryakov

*Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS,
Acad. Koptuyuga prosp., 3, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: SibiryakovBP@ipgg.nsc.ru*

In the logarithmic scale the relation between specific surface and the number of instable solutions of equations of motion is close to experimental relation between the energy and the number of earthquakes. This law is not specific for seismology only. The metastable phenomena, which introduce catastrophic processes, are special states between statics and dynamics.

Integral geometry, Gutenberg–Richter law, metastable phenomena

ВВЕДЕНИЕ

Микронеоднородные среды с большой контрастностью компонент (перепад по физико-механическим свойствам не в несколько раз, а на многие порядки) требуют либо решения краевых задач с граничными условиями на всей сложной поверхности пор, либо создания новых моделей континуума, где внутренняя геометрия была бы задана с самого начала. Не отрицая полезности первого подхода, все же следует сказать, что непосредственное интегрирование уравнений равновесия и движения сплошной среды на очень сложных поверхностях границ, помимо очевидных вычислительных трудностей, ставит перед нами весьма трудные, до сих пор не формализованные проблемы физической интерпретации результатов численного моделирования. Каждая краевая задача здесь является лишь одной из реализаций множества возможных структур с одними и теми же коллективными свойствами. Коллективные геометрические свойства описываются функционалами интегральной геометрии. Поэтому геометрические свойства сложных объектов остаются как бы за кадром, что осложняет физическую трактовку результатов численных исследований. Настоящая работа посвящена построению новой модели континуума, где интегральная геометрия порового пространства задана с самого начала.

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРА СПЛОШНОСТИ

Известно, что в интегральной геометрии существует связь между удельной поверхностью образца σ_0 и

средней длиной от поры до поры или от трещины до ее ближайшей соседки l_0 в виде [1]

$$\sigma_0 l_0 = 4(1 - f), \quad (1)$$

где f – пористость. Оператор переноса поля из точки x в точку $x \pm l_0$ дается известным выражением, подробно изложенным в работе [2]

$$u(x \pm l_0) = u(x)e^{\pm l_0 D_x}, \quad (2)$$

где $D_x = \partial/\partial x$ есть символическая переменная, так что экспонента существует, согласно В.П. Маслову [2], а ее формальное разложение в ряд соответствует формуле Лагранжа о конечном приращении. На рис. 1 изображена микроструктура, на которой отчетливо видно, что не всякий ее микрообъем является представительным.

Оператор переноса поля из центра некоторой сферы радиуса l_0 на ее поверхность, следуя идее В.П. Маслова, можно обобщить [1] как

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp[l_0 (D_x \sin \theta \cos \varphi + D_y \sin \theta \sin \varphi + D_z \cos \theta)] \times \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3)$$

Таким образом, оператор переноса поля на поверхность выделенной сферы (структуры) есть функция символических переменных D_x, D_y, D_z , а также параметра l_0 – среднего линейного размера структуры, определяемого удельной поверхностью пор и трещин

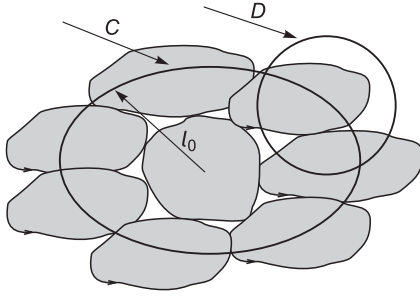


Рис. 1. Иллюстрация невозможности использовать бесконечно малый объем для описания равновесия среды, состоящей из отдельных блоков.

Так, для поверхности C силы образуют систему, полный вектор которой (интеграл по поверхности) равен нулю, в то время как для поверхности D равенство нулю упомянутого интеграла отнюдь не гарантировано. Это обстоятельство приводит к тому, что при общем макроскопическом состоянии равновесия возникают отдельные микродинамические явления.

в соответствии с выражением (1). Этот оператор ставит в соответствие реальному полю напряжений и деформаций некоторый непрерывный образ последних, по отношению к которому дифференциальные операции имеют обычный смысл. Его можно назвать оператором сплошности и применять основные законы сохранения к напряжениям, сглаженным, благодаря действию оператора P . Существует известное равенство Пуассона [3]:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta \sin \varphi + \gamma \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} f(R \cos p) \sin p dp = 2\pi \int_{-1}^1 f(Rt) dt, \quad R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}. \quad (4)$$

С использованием (4) оператор переноса поля может быть переписан в несколько иной форме:

$$P(D_x, D_y, D_z; l_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(l_0 \sqrt{\Delta} \cdot t) dt = \int_0^1 Ch(l_0 \sqrt{\Delta} \cdot t) dt = \frac{Sh(l_0 \sqrt{\Delta})}{l_0 \sqrt{\Delta}} = E + \frac{l_0^2 \Delta}{3!} + \frac{l_0^4 \Delta \Delta}{5!} + \dots \quad (5)$$

Классическому континууму сплошной среды отвечает случай равенства нулю среднего размера структуры ($P = E$) или обращению оператора P в единичный. Тем самым классический континуум предполагает, что любые физические свойства в некоторой точке есть средние по объему некоторой сферы достаточно малого радиуса. Для континуума со структурой, очевидно, это не так.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Уравнение движения микroneоднородной среды для напряжений, подвергнутых действию оператора P , практически такое же, что и для обычной ситуации для сплошной среды, а именно [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [P(\sigma_{ik})] = \rho \ddot{u}_i. \quad (6)$$

В развернутом виде уравнение (6) можно переписать в форме

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(E + \frac{l_0^2}{3!} \Delta + \frac{l_0^4}{5!} \Delta \Delta + \dots \right) \sigma_{ik} = \rho \ddot{u}_i. \quad (7)$$

Ранее показано, что уравнение бесконечного порядка (7) появляется вследствие неэквивалентности разностных и дифференциальных операторов для сред с конечными линейными размерами структур. Для стационарных колебаний уравнение (7) существенно упрощается, а именно:

$$\Delta u^r \left(E + \frac{l_0^2 \Delta}{3!} + \frac{l_0^4 \Delta \Delta}{5!} + \dots \right) + k_S^2 u = 0, \quad (8)$$

где $k_S = \omega/\nu$ – волновое число, характерное для обычных продольных или поперечных волн. Если искать решение этого уравнения в виде экспоненты

$$u = A \exp(ik_1 x + ik_2 y + ik_3 z); \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}, \quad (9)$$

то возникает дисперсионное уравнение относительно неизвестного волнового числа k , т. е. при заданной частоте относительно неизвестной скорости распространения волн, а именно:

$$\frac{\sin(kl_0)}{kl_0} - \frac{k_S^2}{k^2} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) содержит бесчисленное множество как вещественных, так и комплексных корней, причем при $l_0 \rightarrow 0$, очевидно, $k \rightarrow k_S$. Этот корень дает скорость обычных звуковых волн. Малые, но конечные значения l_0 приводят к тому, что отношение синуса к аргументу становится меньше единицы. Тем самым скорость волн уменьшается при наличии конечных размеров структуры. Решением (10) также являются большие значения kl_0 , близкие к кратным числам π . Эти решения дают сверхмалые скорости волн, ничем снизу не ограниченные. Кроме того, при определенных значениях аргумента синус может принимать также отрицательные значения. Это значит, что среди решений уравнения (10) имеются комплексные значения волнового числа.

Комплексные корни дисперсионного уравнения связаны либо с затуханием волн, либо с неограниченным ростом амплитуд. Такие корни могут трактоваться как параметрические резонансы в средах со структурой, они отсутствуют в сплошных средах. Можно показать, что все решения известного уравнения Матье, которые описывают классические параметрические резонансы при колебаниях маятника с осциллирующей точкой подвеса, содержатся в решениях уравнения (8) [3]. Структура решений (8) та же самая, как и структура уравнения Матье. Поэтому неустойчивые решения (8) можно трактовать как параметрические резонансы. Отметим еще одно важное свойство решений уравнения (10). Как вещественные, так и комплексные корни этого уравнения образуют дискретный спектр. Это означает своеобразное квантование волновых и неустойчивых процессов в средах со структурой. Каждый корень есть некоторый сценарий поведения колебательного процесса. Перейти от одного сценария к другому можно только лишь дискретным образом, затратив некоторую конечную порцию энергии. Это обстоятельство весьма сильно отличает среды со структурой от классических непрерывных сред.

Существование малых и сверхмалых скоростей волн в блочных средах размывает грань между статикой и динамикой. Это означает, что медленные волновые процессы могут предшествовать катастрофам. Классическая модель сплошной среды ставит нас перед двоичной альтернативой. Либо быстрые, либо медленные движения. Без каких бы то ни было промежуточных состояний. Такие явления, как сейсмическая эмиссия, также связаны с представленной моделью континуума. Это состояние, когда среда в целом уравновешена, но этого нельзя гарантировать в каждой точке среды. Тем самым модель допускает отдельные микродинамические акты при состоянии равновесия в целом. Указанное положение иллюстрируется на рис. 1. Различие состояния среды в точке и состояния среды в некотором объеме есть источник особых свойств контрастных микронеоднородных сред, содержащих поры и трещины. Эти особенности устраняются при построении идеального континуума Коши и Пуассона, лишенного внутренней геометрии.

ЗАКОН ПОВТОРЯЕМОСТИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Уравнение (10) дает множество вещественных и комплексных корней. Вещественные корни соответствуют колебательным процессам, а комплексные могут содержать в себе как затухающие процессы, так и катастрофы. Число комплексных корней увеличивается с уменьшением удельной поверхности пор и трещин. Удельная поверхность имеет размерность обратной длины. Безразмерная удельная поверхность может быть представлена выражением

$$1/\varepsilon = \sigma_0 \lambda_S / 8\pi(1-f), \quad (11)$$

где λ_S – длина обычной поперечной волны. В двойном логарифмическом масштабе эта теоретическая зависимость представляется множеством точек, образующих некоторое подобие прямой линии. Дефицит потенциальной энергии при образовании трещин пропорционален их удельной поверхности. Этот де-

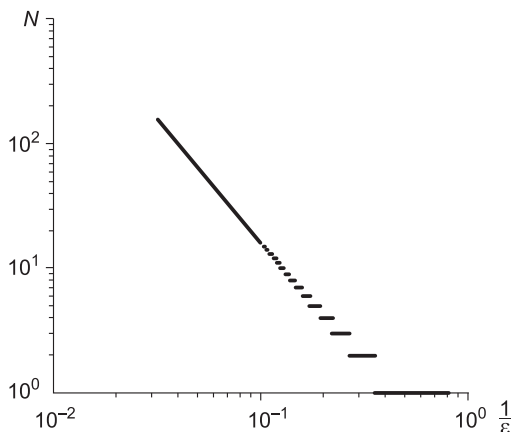


Рис. 2. Теоретическая зависимость числа неустойчивых решений от безразмерной удельной поверхности трещин или обратной величины $1/\varepsilon = \sigma_0 \lambda_S / 8\pi(1-f)$.

При больших удельных поверхностях (больших энергиях) отчетливо видна неединственность решения, связанная с появлением горизонтальных полос. Тангенс угла наклона близок к 0,5.

фицит потенциальной энергии должен быть равен кинетической энергии излучения сейсмических волн

$$E = \int_S P_i u_i dS. \quad (12)$$

В выражении (12) под интегралом стоит произведение нагрузок на перемещение, т. е. потенциальная энергия, которая выделяется при образовании трещины, когда снимается нормальная либо сдвиговая нагрузка. По закону сохранения энергии она переходит в кинетическую энергию колебаний. Если интеграл распространен на всю поверхность трещин, а перемещение происходит по касательным направлениям трещин без заметного раскрытия последних, то полная энергия колебаний будет пропорциональна поверхности трещин. Если же перемещения направлены по нормали к поверхности трещин, то потенциальная энергия будет пропорциональна произведению поверхности трещины на ее раскрытие, т. е. объему образовавшейся трещины. Поэтому представляется возможным сопоставить теоретическую зависимость числа неустойчивых решений уравнения (10) как функцию удельной поверхности трещин с экспериментальной зависимостью числа землетрясений от энергии колебаний.

На рис. 2, 3 даны эти теоретические и экспериментальные зависимости. Экспериментальный закон повторяемости (см. рис. 3) взят из работы Ю.В. Ризниченко по материалам землетрясений Средней Азии [4]. Это так называемое кумулятивное распределение, т. е. накопленная энергия в течение некоторого времени. Тангенс угла наклона на диаграмме Ризниченко колеблется от 0,5 до 0,52 в зависимости от способов обработки. Теоретический график дает тангенс, близкий к 0,5. Неединственность решений отражается на теоретическом графике появлением прямолинейных отрезков, т. е. множества удельных поверхностей (энергий), соответствующих одному и тому же числу катастрофических событий. Это объясняют недостатком статистического материала в силу редкости боль-

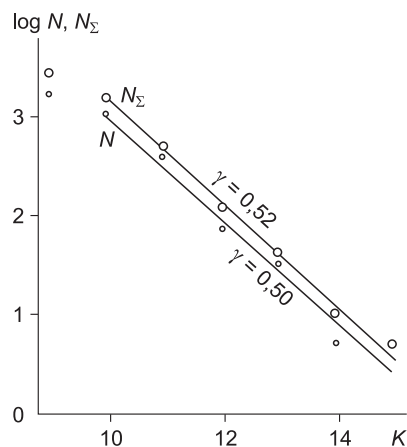


Рис. 3. Экспериментальная зависимость числа землетрясений от их энергии.

Данные Ю.В. Ризниченко (Средняя Азия). Тангенс угла наклона 0,5–0,52.

ших землетрясений. Обычно в сейсмологии оперируют не энергией, а магнитудой или сейсмическим моментом. Однако для сопоставления данных теории и опыта все же предпочтительней иметь дело с энергией. Более современные данные получены на основании глобального каталога [5]. Автор работы [5] объясняет отклонения от классического закона на малых энергиях тем обстоятельством, что не все события такого рода записаны. В пользу этого предположения говорят и данные, полученные при изучении колебания ледяного покрова в Японии и России. Величина $m \approx 2$ (тангенс дополнительного угла наклона) соответствует результатам, полученным в 1978 г. [6] на ледовом покрове оз. Сува (Япония). Здесь вблизи границы раздела было получено характерное значение тангенса угла наклона $m = 1,9$. При ледовых работах по междисциплинарному проекту № 20 СО РАН (2009 г.) на оз. Байкал были зарегистрированы колебания ледяных блоков, где величина указанного показателя колеблется от 1 до 4. Однако среднее значение в течение 1 суток колеблется слабо и составляет около 2,25 [7]. Очевидно, что появление неустойчивых ситуаций в блочных средах с законом, близким к классическому закону Гутенберга–Рихтера – это не специфически сейсмологическое явление. Оно свойственно очень многим физико-механическим процессам, возникающим в блочных средах с большим числом степеней свободы. Теория предсказывает принципиальную неединственность такого рода явлений при больших энергиях. Кроме того, график на рис. 2 показывает зависимость числа неустойчивых решений от поверхности трещин, а не от их объема. А это возможно лишь для трещин сдвигового типа, без существенного раскрытия последних.

ВЫВОДЫ

Мы можем констатировать, что сдвиговый механизм землетрясений, по-видимому, настолько же верен, насколько верен закон повторяемости. В уравне-

нии движения использованы только закон сохранения импульса и дискретная модель пространства с большим числом степеней свободы блоков. Поскольку в дисперсионном уравнении не были использованы никакие граничные условия, то отсюда следует достаточная универсальность этого закона. В нем нет никакой сейсмологической специфики. Это общий закон распределения неустойчивых состояний. Он не зависит от географического положения источника катастроф, от геологического строения и от состава горных пород.

Литература

1. **Sibiriakov B.P.** Supersonic and intersonic cracking in rock-like material under remote stresses // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2002. V. 38, N 3. P. 255–265.
2. **Маслов В.П.** Операторные методы. М.: Наука, 1973. 544 с.
3. **Sibiriakov B.P., Prilous B.I.** The unusual small wave velocities in structural bodies and instability of pore or cracked media by small vibration // *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*. Issue 7, V. 2, July 2007, ISSN 1991-8747. <http://www.worldses.org/journals/mechanics/mechanics-july2007.htm>
4. **Ризниченко Ю.В.** Проблемы сейсмологии. М.: Наука 1985. 68 с.
5. **Felzer K.R.** Calculating the Gutenberg–Richter b value // *American Geophysical Union, Fall Meeting 2006, 12/2006*, <http://pasadena.wr.usgs.gov/office/kfelzer/AGU2006Talk.pdf>
6. **Hamaguchi H., Goto K.** A study on ice faulting and icequake activity in the Lake Suwa, (2) Temporal variation of m -value // *The Sci. Rep. of the Tohoku Univ.* 1978. Ser. 5. V. 25 (1). P. 25–38.
7. **Предварительный отчет** по междисциплинарному проекту СО РАН № 20. Физическое моделирование деформационных процессов различного уровня в литосфере на основе исследования ледового покрова озера Байкал. Новосибирск; Томск; Иркутск; Улан-Удэ, 2009. 68 с.