



ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТАЯ СРЕДА: ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО КООРДИНАТЕ ТОЧКИ РАЗРЫВА СРЕДЫ

А.Л. Карчевский

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 4, Россия, e-mail: karchevs@math.nsc.ru*

В работе доказано существование производной функционала невязки по координате точки разрыва среды и получено выражение для нее.

Обратная задача, точка разрыва среды, горизонтально-слоистая среда, функционал невязки

HORIZONTALLY STRATIFIED MEDIUM: DIFFERENTIATION WITH RESPECT TO THE DISCONTINUITY POINT COORDINATE

A.L. Karchevsky

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Koptyuga prosp., 4, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: karchevs@math.nsc.ru*

In this paper we prove the existence of derivative of residual functional with respect to a coordinate of medium properties discontinuity. We also derive expressions for this derivative.

Inverse problem, medium discontinuity point, horizontally stratified medium, residual functional

ВВЕДЕНИЕ

При интерпретации геофизических данных требуется определять не только упругие или электромагнитные параметры, но и местоположение точек разрыва среды. В современной геофизике существует много методов для определения границ, однако не секрет, что ошибки в определении глубин залегания различных слоев все же присутствуют, они могут достигать нескольких метров [1]. С ростом глубин растет и ошибка. Например, ошибки при определении глубины залегания границ в скважине в основном возникают вследствие растяжения каната, на котором находится зонд. Существуют поправки растяжения длины каната в зависимости от глубины, погрешность определения глубины это уменьшает, но не ликвидирует. Еще один существенный фактор, приводящий к неточности определения местоположения границ, – отклонение скважины от запланированного положения. При межскважинном зондировании погрешности могут значительно вырасти в зависимости от ряда различных факторов.

На практике обычно для решения обратной задачи применяется метод минимизации функционала невязки. Если для восстановления, например, продольной скорости в тонкослоистой пачке можно применять градиентные методы минимизации функционала, поскольку техника вывода градиента уже достаточно хорошо известна и отработана (см., например, [2]), то для восстановления или уточнения местоположения границ тонких слоев из-за незнания производной функционала невязки по координате точки разрыва среды мы можем применять методы минимизации, использующие только значения функционала невязки. Очевидно, что сочетание при минимизации

градиентных и неградиентных методов плохо скажется на процессе поиска минимума. Хотелось бы унификации процесса минимизации: использования градиентных методов для восстановления упругих или электромагнитных свойств среды и для восстановления или уточнения местоположения границ слоев. Иными словами, необходимо уметь дифференцировать функционал невязки по координате точки разрыва среды. В настоящей работе доказано существование такой производной и получено ее выражение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим горизонтально-слоистую среду с границами раздела z_k , $k = 0, \overline{N}$, $z_0 = 0$; m -й слой находится в интервале $[z_{m-1}, z_m]$, последний $(N + 1)$ -й слой (подстилающий) есть $[z_N, \infty)$. Считаем, что физические свойства каждого слоя характеризуются параметрами Ламе и плотностью ρ , которые являются кусочно-постоянными функциями переменной z , $0 < z < \infty$.

Техника дифференцирования функционала невязки по координате точки разрыва среды для простоты будет рассмотрена на примере постановки обратной задачи, следующей из уравнений теории упругости. Будем считать, что источник вида

$$F(t)\nabla\delta(x, y, z - z_s) \quad (1)$$

в начальный момент времени $t = 0$ возбуждает в среде упругие колебания. Полагаем, что источник находится в одном из слоев, т. е. $z_s \neq z_k$. Источник вида (1) является центром расширения и служит моделью взрыва. Система наблюдений поверхностная.

Имеем постановку прямой задачи (вывод см. в Приложении)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \rho p^2 u_z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad u_z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (3)$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (4)$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_s} = 0, \quad [u_z]_{z_s} = -\frac{F(p)}{\rho V_p^2}. \quad (5)$$

Здесь u_z – образ вертикальной компоненты поля смещений; $F(p)$ – образ Лапласа функции $F(p)$ из (1); V_p – продольная скорость; $p = -\alpha + i\omega$ – параметр преобразования Лапласа ($\alpha > 0$ – параметр затухания, ω – круговая частота). Обозначение $[g]_z$ означает скачок функции g в точке z : $[g]_z = g(z+0) - g(z-0)$.

Предполагаем, что о решении прямой задачи (2)–(5) известна дополнительная информация

$$u_z(z, p)|_{z=0} = u_{z,0}(p). \quad (6)$$

Обратная задача. Восстановить неизвестные продольную скорость V_p и точки разрыва среды z_k , если о решении прямой задачи (2)–(5) известна следующая дополнительная информация (6).

Обратная задача может решаться численно при помощи минимизации функционала невязки

$$J = \sum |u_z(0, p) - u_{z,0}(p)|^2. \quad (7)$$

Основным результатом работы будет доказательство существования производной функционала невязки по координате точки разрыва среды и получение этой производной в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z_s} J = \sum_w \operatorname{Re} \{ 2(\overline{u_z(0, p)} - \overline{u_{z,0}(p)}) w(0, p) \}, \quad (8)$$

где функция $w(z, p)$ есть решение следующей прямой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_p^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \rho p^2 w = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad w \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (10)$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [w]_{z_k} = 0, \quad (11)$$

$$k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N,$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_s} = -p^2 [\rho]_{z_s} \cdot u_z(z_s, p), \quad (12)$$

$$[w]_{z_s} = -\left[\frac{1}{\rho V_p^2} \right]_{z_s} \cdot \left(\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s}.$$

Здесь и далее черта сверху над какой-либо величиной будет означать комплексное сопряжение.

Если принять во внимание работы [2–13], то возможно построение аналитических выражений для решений прямых задач (2)–(5) и (9)–(12) и, следовательно, самой производной (8).

Далее (в случае необходимости) для кусочно-постоянной функции g будет использоваться обозначение $(g)_s$, означающее, что значение функции g взято в слое s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ $\frac{\partial}{\partial z_s} J$

Фиксируем все точки z_k , кроме z_s .

Будем рассматривать кусочно-постоянные функции ρ^+ и $(V_p^2)^+$ с верхним индексом $+$, если их значения в слоях совпадают со значениями функций ρ и V_p^2 , все точки разрывов z_k ($k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N$) совпадают, функции ρ^+ и $(V_p^2)^+$ в точке z_s непрерывны, а разрыв находится в точке $z_s + \tau$ ($\tau > 0$). Также рассмотрим кусочно-постоянные функции ρ^- и $(V_p^2)^-$ с верхним индексом $-$, если их значения в слоях совпадают со значениями функций ρ и V_p^2 , все точки разрывов z_k ($k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N$) совпадают, функции ρ^- и $(V_p^2)^-$ в точке z_s непрерывны, а разрыв находится в точке $z_s - \tau$ ($\tau > 0$, см. рисунок).

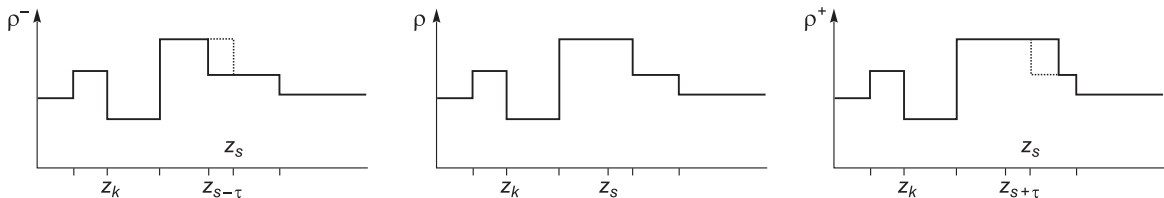
Соответствующим новым коэффициентам решения прямой задачи (2)–(5) дадим те же верхние индексы: u_z^+ или u_z^- .

Ниже будем использовать кусочно-постоянные функции $\Delta^+(\cdot)$ и $\Delta^-(\cdot)$, которые, например, для кусочно-постоянной функции ρ действуют по правилу

$$\Delta^+(\rho) \equiv \rho^+ - \rho = \begin{cases} 0, & z < z_s, \\ -[\rho]_{z_s}, & z_s \leq z \leq z_s + \tau, \\ 0, & z > z_s + \tau, \end{cases} \quad (13)$$

$$\Delta^-(\rho) \equiv \rho^- - \rho = \begin{cases} 0, & z < z_s - \tau, \\ [\rho]_{z_s}, & z_s - \tau \leq z \leq z_s, \\ 0, & z > z_s. \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим правую и левую производные функционала невязки и докажем их равенство, отсюда будет следовать существование производной (8).



Пример кусочно-постоянных функций с индексами $+$ и $-$.

Итак, для функционала невязки (7) мы можем написать

$$\frac{J[z_s + \tau] - J[z_s]}{\tau} = \sum_{\omega} \left((u_z^+ - u_{z,0}) \overline{w_{\tau}^+} + (\overline{u_z} - \overline{u_{z,0}}) w_{\tau}^+ \right),$$

$$w_{\tau}^+ = \frac{u_z^+ - u_z}{\tau},$$

$$\frac{J[z_s - \tau] - J[z_s]}{\tau} = \sum_{\omega} \left((u_z^- - u_{z,0}) \overline{w_{\tau}^-} + (\overline{u_z} - \overline{u_{z,0}}) w_{\tau}^- \right),$$

$$w_{\tau}^- = \frac{u_z^- - u_z}{\tau}.$$

Рассмотрим предел справа

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{J[z_s + \tau] - J[z_s]}{\tau}. \quad (15)$$

Функция w_{τ}^+ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left((\rho V_P^2)^+ \frac{\partial w_{\tau}^+}{\partial z} \right) - \rho^+ p^2 w_{\tau}^+ =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + p^2 \frac{\Delta^+ (\rho)}{\tau} u_z, \quad (16)$$

$$\frac{\partial w_{\tau}^+}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad w_{\tau}^+ \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (17)$$

$$\left[(\rho V_P^2)^+ \frac{\partial w_{\tau}^+}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [w_{\tau}^+]_{z_k} = 0,$$

$$k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N,$$

$$\left[(\rho V_P^2)^+ \frac{\partial w_{\tau}^+}{\partial z} \right]_{z_s} = - \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s+0}, \quad (18)$$

$$[w_{\tau}^+]_{z_s} = 0,$$

$$\left[(\rho V_P^2)^+ \frac{\partial w_{\tau}^+}{\partial z} \right]_{z_s+\tau} = \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s+\tau-0},$$

$$[w_{\tau}^+]_{z_s+\tau} = 0.$$

Введем новую функцию

$$v = (\rho V_P^2)^+ \frac{\partial w_{\tau}^+}{\partial z}$$

и получим из дифференциального уравнения второго порядка (16) систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial z} W^{\tau} - G W^{\tau} = K, \quad (19)$$

где

$$W^{\tau} = \begin{bmatrix} v \\ w_{\tau}^+ \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & p^2 \rho^+ \\ (\rho V_P^2)^+ & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{2\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + p^2 \frac{\Delta^+ (\rho)}{2\tau} u_z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для некоторого фиксированного τ система (19) может быть решена. Пусть

$$W^{\tau} \Big|_{z=z_s-0} = W_s,$$

где W_s – известное значение. Тогда, принимая во внимание условия склейки (18), получим

$$W^{\tau} \Big|_{z=z_s+0} = W_s - \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s+0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение матричного уравнения (19) на интервале $[z_s, z_s + \tau]$ может быть записано в следующем виде:

$$W^{\tau} = e^{G(z-z_s)} \left(W_s - \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{2\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s+0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + e^{G(z-z_s)} \times$$

$$\times \int_{z_s}^z e^{-G(\lambda-z_s)} \left(- \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + p^2 \frac{\Delta^+ (\rho)}{\tau} u_z \right) \Big|_{z_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda =$$

$$= e^{G(z-z_s)} W_s + \frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{G(z-z_s)} \times$$

$$\times \int_{z_s}^z e^{-G(\lambda-z_s)} \left(- \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) G + \left(p^2 \frac{\Delta^+ (\rho)}{\tau} u_z \right) E \right) \Big|_{z_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda,$$

где E – единичная матрица. Тогда

$$W^{\tau} \Big|_{z=z_s+\tau-0} = e^{\tau G} W_s + \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s+\tau-0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{\tau G} \times$$

$$\times \int_{z_s}^{z_s+\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} \left(- \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) G + \left(p^2 \frac{\Delta^+ (\rho)}{\tau} u_z \right) E \right) \Big|_{z_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda.$$

Принимая во внимание условия склейки (18), получим

$$W^{\tau} \Big|_{z=z_s+\tau+0} = e^{\tau G} W_s + e^{\tau G} \int_{z_s}^{z_s+\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} \times$$

$$\times \left(- \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) G + \left(p^2 \frac{\Delta^+ (\rho)}{\tau} u_z \right) E \right) \Big|_{z_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda.$$

В результате имеем

$$W^{\tau} \Big|_{z=z_s+\tau+0} - W^{\tau} \Big|_{z=z_s-0} = (e^{\tau G} - E) W_s + e^{\tau G} \times$$

$$\times \int_{z_s}^{z_s+\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} \left(- \left(\frac{\Delta^+ (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) G + \left(p^2 \frac{\Delta^+ (\rho)}{\tau} u_z \right) E \right) \Big|_{z_s} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda.$$

Принимая во внимание (13), преобразуем первое слагаемое под интегралом

$$\frac{[\rho V_P^2]_{z_s}}{(\rho V_P^2)_s} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{[\rho V_P^2]_{z_s}}{(\rho V_P^2)_s (\rho V_P^2)_{s+1}} \left((\rho V_P^2)_{s+1} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) =$$

$$= - \left[\frac{1}{\rho V_P^2} \right]_{z_s} \left((\rho V_P^2)_{s+1} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad z \in [z_s, z_s + \tau].$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} W^\tau \Big|_{z=z_s+\tau+0} - W^\tau \Big|_{z=z_s-0} &= (e^{\tau G} - E) W_s - \\ - e^{\tau G} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^{z_s+\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} &\left(\left[\frac{1}{\rho V_P^2} \right]_{z_s} \left((\rho V_P^2)_{s+1} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \right. \\ &\left. + p^2 [\rho]_{z_s} u_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

Под интегралом находится ограниченная и непрерывная на интервале $[z_s, z_s + \tau]$ функция, следовательно, можем перейти к пределу $\tau \rightarrow 0$. Очевидно, что

$$V_P^+ \rightarrow V_P, \quad \rho^+ \rightarrow \rho, \quad u_z^+ \rightarrow u_z, \quad \text{когда } \tau \rightarrow 0.$$

Обозначим

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} W^\tau = W, \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} w_\tau^+ = w_\tau.$$

Тогда из (20) получим

$$[W]_{z_s} = -p^2 [\rho]_{z_s} u_z(z_s, p) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left[\frac{1}{\rho V_P^2} \right]_{z_s} \left(\rho V_P^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда и из (16)–(18) видим, что функция w_r удовлетворяет следующей задаче:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_P^2 \frac{\partial w_r}{\partial z} \right) - \rho p^2 w_r = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial w_r}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad w_r \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (22)$$

$$\left[\rho V_P^2 \frac{\partial w_r}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [w_r]_{z_k} = 0, \quad (23)$$

$$k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N,$$

$$\left[\rho V_P^2 \frac{\partial w_r}{\partial z} \right]_{z_s} = -p^2 [\rho]_{z_s} \cdot u_z(z_s, p), \quad (24)$$

$$[w_r]_{z_s} = - \left[\frac{1}{\rho V_P^2} \right]_{z_s} \cdot \left(\rho V_P^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s}.$$

Решив задачу (21)–(24), мы сможем вычислить производную справа

$$\left(\frac{\partial J}{\partial z_s} \right)_r = \sum_{\omega} \operatorname{Re} \left\{ 2 \left(\overline{u_z(0, p)} - \overline{u_{z,0}(p)} \right) w_r(0, p) \right\}. \quad (25)$$

Рассмотрим предел слева

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{J[z_s - \tau] - J[z_s]}{\tau}, \quad (26)$$

функцию w_τ^- и задачу, решением которой она является

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left((\rho V_P^2)^- \frac{\partial w_\tau^-}{\partial z} \right) - \rho^- p^2 w_\tau^- &= \\ = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Delta^- (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + p^2 \frac{\Delta^- (\rho)}{\tau} u_z, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{\partial w_\tau^-}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad w_\tau^- \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (28)$$

$$\left[(\rho V_P^2)^- \frac{\partial w_\tau^-}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [w_\tau^-]_{z_k} = 0,$$

$$k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N,$$

$$\left[(\rho V_P^2)^- \frac{\partial w_\tau^-}{\partial z} \right]_{z_s-\tau} = - \left(\frac{\Delta^- (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s-\tau+0}, \quad (29)$$

$$[w_\tau^-]_{z_s-\tau} = 0,$$

$$\left[(\rho V_P^2)^- \frac{\partial w_\tau^-}{\partial z} \right]_{z_s} = \left(\frac{\Delta^- (\rho V_P^2)}{\tau} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s-0},$$

$$[w_\tau^-]_{z_s} = 0.$$

Далее действуем так, как было показано выше, т. е. вводим новую функцию

$$v = (\rho V_P^2)^- \frac{\partial w_\tau^-}{\partial z}$$

и сводим дифференциальное уравнение второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-столбца

$$W^\tau = \begin{bmatrix} v \\ w_\tau^- \end{bmatrix}.$$

Положив

$$W^\tau \Big|_{z=z_s+0} = W'_s,$$

приняв во внимание условия склейки (29), выписываем решение системы на интервале $[z_s - \tau, z_s]$ и окончательно получаем

$$\begin{aligned} W^\tau \Big|_{z=z_s+0} - W^\tau \Big|_{z=z_s-\tau-0} &= \\ = (E - e^{-\tau G}) W_s + e^{-\tau G} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^{z_s-\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} \times \\ \times \left(\left[\frac{1}{\rho V_P^2} \right]_{z_s} \left((\rho V_P^2)_s \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + p^2 [\rho]_{z_s} u_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Переходя к пределу $\tau \rightarrow 0$, в результате имеем

$$\begin{aligned} [W]_{z_s} &= -p^2 [\rho]_{z_s} u(z_s, p) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \\ &- \left[\frac{1}{\rho V_P^2} \right]_{z_s} \left(\rho V_P^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

и это означает, что функция w_l удовлетворяет прямой задаче

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_P^2 \frac{\partial w_l}{\partial z} \right) - \rho p^2 w_l = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad w_l \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (31)$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial w_l}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [w_l]_{z_k} = 0, \quad (32)$$

$$k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N,$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial w_l}{\partial z} \right]_{z_s} = -p^2 [\rho]_{z_s} \cdot u_z(z_s, p), \quad (33)$$

$$[w_l]_{z_k} = - \left[\frac{1}{\rho V_p^2} \right]_{z_s} \cdot \left(\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_s}.$$

Решив задачу (30)–(33), мы сможем вычислить производную слева

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_s} J \right) = \sum_{\omega} \operatorname{Re} \left\{ 2 \left(\overline{u_z(0, p)} - \overline{u_{z,0}(p)} \right) w_l(0, p) \right\}. \quad (34)$$

Поскольку постановки задач (21)–(24) и (30)–(33) совпадают, то

$$w_r = w_l \equiv w.$$

Существование правой w_r и левой w_l производных означает, что функция u_z непрерывна слева и справа в окрестности точки z_s , поскольку

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} u_z^+ = \lim_{\tau \rightarrow +0} u_z^- = u_z,$$

то функция u_z непрерывна в точке z_s .

Таким образом, правая (25) и левая (34) производные равны, следовательно, существует производная и она равна (8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано существование и получена производная функционала невязки (7) по координате точки разрыва среды для прямой задачи (2)–(5). Данное доказательство и получение выражения для производной можно без привлечения каких-либо дополнительных математических сведений перенести на постановки прямых задач для систем уравнений (см. (36) и работы [10, 11]), следующих из уравнений теории упругости или уравнений Максвелла, а также и из уравнения акустики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00105.

ПРИЛОЖЕНИЕ:

Вывод постановки прямой задачи

Поскольку модель среды является горизонтально-слоистой, следовательно, она обладает цилиндрической симметрией, в этом случае система дифференциальных уравнений теории упругости для смещений может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{u}_r) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \mathbf{u}_z) \right] - F(t) \delta'(r) \delta(z - z_*), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \mathbf{u}_r) \right] \right) - F(t) \delta'(r) \delta'(z - z_*), \end{aligned}$$

и к ней могут быть применены преобразование Фурье–Бесселя по горизонтальной переменной r и преобразование Лапласа по переменной t :

$$u_r(v, z, p) = \int_0^{\infty} e^{pt} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_r(r, z, t) r J_1(vr) dr dt,$$

$$u_z(v, z, p) = \int_0^{\infty} e^{pt} \int_0^{\infty} \mathbf{u}_z(r, z, t) r J_0(vr) dr dt,$$

после чего приходим к следующему матричному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial}{\partial z} U + v B U \right) - v B' \frac{\partial}{\partial z} U - D U &= \\ &= \hat{F}(p, v, z, z_*), \end{aligned} \quad (36)$$

где функции $u_r(v, z, p)$, $u_z(v, z, p)$ являются образами функций поперечных $\mathbf{u}_r(r, z, t)$ и продольных $\mathbf{u}_z(r, z, t)$ смещений; v и $p = -\alpha + i\omega$ – параметры преобразования Фурье–Бесселя и Лапласа соответственно; штрих у матрицы обозначает, что она транспонированная, и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(p, v, z, z_*) = \\ &= F(p) \left(v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(z - z_*) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta'(z - z_*) \right), \\ A &= \rho \begin{bmatrix} V_S^2 & 0 \\ 0 & V_P^2 \end{bmatrix}, \quad B = \rho \begin{bmatrix} 0 & -V_S^2 \\ V_P^2 - 2V_S^2 & 0 \end{bmatrix}, \\ D &= \rho p^2 E + \rho v^2 \begin{bmatrix} V_P^2 & 0 \\ 0 & V_S^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где λ , μ – параметры Ламе; ρ – плотность и $V_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $V_S = \sqrt{\mu/\rho}$ – продольная и поперечная скорости в среде, которые являются кусочно-постоянными функциями. Источник (1) в цилиндрических координатах имеет вид, как указано в уравнении (35).

К дифференциальному матричному уравнению (36) необходимо добавить краевые условия: отсутствие напряжений на поверхности

$$\left(A \frac{\partial}{\partial z} U + v B U \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad (37)$$

и условия затухания на бесконечности

$$U \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty). \quad (38)$$

В точках разрыва среды z_k должны удовлетворяться условия склейки: поля напряжений и смещений не рвутся

$$\left[A \frac{\partial}{\partial z} U + v B U \right]_{z_k} = 0, \quad [U]_{z_k} = 0. \quad (39)$$

Здесь использовано обозначение $[g]_z$, которое означает скачок функции g в точке z : $[g]_z = g(z + 0) - g(z - 0)$.

Положим параметр преобразования Фурье–Бесселя нулю, т. е. $v = 0$. Из (36)–(39) получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \rho p^2 u_z = -F(p) \delta'(z - z_*), \quad (40)$$

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad u_z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (41)$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \quad (42)$$

“Уберем” источник из правой части уравнения (40), воспользовавшись свойством обобщенной производной. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} + [u_z]_{z_*} \delta(z - z_*), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right\} + \\ &+ \left[\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_*} \delta(z - z_*) + \rho V_p^2 [u_z]_{z_*} \delta'(z - z_*). \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь в фигурных скобках имеется в виду классическая производная, а значения кусочно-постоянных функций ρ и V_p взяты из того слоя, где расположен источник.

Подставим (43) в уравнение (40) и приравняем коэффициенты при дельта-функциях. В результате придем к постановке:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \rho p^2 u_z = 0, \quad (44)$$

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad u_z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (45)$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (46)$$

$$\left[\rho V_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_*} = 0, \quad [u_z]_{z_*} = -\frac{F(p)}{\rho V_p^2}. \quad (47)$$

Очевидно, если дополнительная информация о решении системы дифференциальных уравнений (35) была известна в виде

$$\mathbf{u}_z(r, z, t)|_{z=0} = \mathbf{u}_{z,0}(r, 0, t),$$

то после всех преобразований для постановки прямой задачи (44)–(47) ее можно записать так

$$u_z(z, p)|_{z=0} = u_{z,0}(p).$$

Литература

1. Гурвич И.И. Сейсмическая разведка. 2-е изд. М.: Недра, 1970. 552 с.
2. Karchevsky A.L. Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers // J. Inverse and III-Posed problems. 2010. V. 18. P. 371–388.
3. Дмитриев В.И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1968. Вып. 10. С. 55–65.
4. Дмитриев В.И., Федотова Э.А. Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1980. Вып. 32. С. 150–183.
5. Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 2. С. 272–286.
6. Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г. Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
7. Фатьянов А.Г. Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии. Новосибирск, 1989. (Препр. / ВЦ СО АН СССР; № 857).
8. Фатьянов А.Г. Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310, № 2. С. 323–327.
9. Карчевский А.Л. Метод численного решения системы упругости для горизонтально-слоистой анизотропной среды // Геология и геофизика. 2005. Т. 46, № 3. С. 339–351.
10. Карчевский А.Л. Прямая динамическая задача сейсмоки для горизонтально-слоистых сред // Сиб. электронные математические известия. 2005. Т. 2. С. 23–61. (<http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf>)
11. Карчевский А.Л. Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
12. Karchevsky A.L. The analytical formulas for the gradient of the residual functional for the coefficient inverse problem for the elasticity system // J. Inverse and III-Posed problems. 2003. V. 11, N 6. P. 619–629.
13. Курпинар Э., Карчевский А.Л. Вычисление градиента при оптимизационном методе решения обратной динамической задачи сейсмоки для горизонтально-слоистой среды // Геология и геофизика. 2005. Т. 46, № 4. С. 439–447.