



## НЕФИЗИЧЕСКИЕ КАУСТИКИ $qP$ -ВОЛН В АКУСТИЧЕСКИХ VTI СРЕДАХ

**А. Стовас**

*Факультет нефтепромыслового дела и прикладной геофизики,  
Норвежский университет науки и технологии (NTNU), S.P. Andersenvei 15A, 7491 Трондхейм, Норвегия,  
e-mail: alexey.stovas@ntnu.no*

Рассматриваются нефизические каустики  $qP$ -волн в акустической трансверсально-изотропной среде с вертикальной осью симметрии. Каустики появляются при больших отрицательных значениях параметра неэллиптичности, что показано для величины геометрического расхождения и фазовой скорости.

*Акустическое приближение, трансверсально-изотропная среда,  $qP$ -волна*

## THE UNPHYSICAL $qP$ -WAVE CAUSTICS IN ACOUSTIC VTI MEDIA

**A. Stovas**

*Department of Petroleum Engineering and Applied Geophysics,  
Norwegian University of Science and Technology (NTNU), S.P. Andersenvei 15A, 7491 Trondheim Norway,  
e-mail: alexey.stovas@ntnu.no*

I analyze the unphysical caustics for  $qP$ -wave in acoustic transversely isotropic media with vertical symmetry axis. Caustics appear at a large negative anelliptic anisotropy parameter as it shown for the geometrical spreading factor and the phase velocity.

*Acoustic approximation, transversally-isotropic medium,  $qP$ -wave*

### ВВЕДЕНИЕ

Описание распространения волн в акустическом приближении было предложено в [1] и оказалось очень полезным для обработки данных во временной области для трансверсально-изотропных сред с вертикальной осью симметрии (VTI), для которых имеются простые аналитические решения. Акустическое приближение можно использовать и для сложных сред, так как оно дает волновое уравнение, точно описывающее кинематику волн [2]. В настоящей работе акустическое приближение используется для того, чтобы выявить “нефизические” эффекты, которые могут появиться на практике при оценке параметров модели. Параметры VTI модели можно найти, используя методы послылойной инверсии реальных данных в  $(t - x)$  области [3–7] или  $(\tau - p)$  области [8, 9]. Однако восстанавливаемые параметры могут быть искажены из-за использования неточной модели кинематической поправки, недостаточной апертуры наблюдений и наличия шума в сейсмических данных. Сами параметры инверсии также не являются полностью независимыми.

Все эти факторы могут привести к появлению нефизических параметров, которые будут приводить к возникновению каустик  $qP$ -волн, распространяющихся в VTI слое. С помощью анализа условий на образование каустик в рамках акустического приближения получены критические значения анизотропного параметра неэллиптичности  $\eta$ , которые являются предельными для начала появления каустик  $qP$ -волн. Показано, что каустики возникают для сильных отрицательных значений  $\eta$ . Также рассмотрены вид этих нефизических каустик в  $(t - x)$  области, их влияние на геометрическое расхождение и фазовую скорость.

### ОДНОРОДНАЯ VTI МОДЕЛЬ

Вертикальную медленность для  $qP$ -волны в трансверсально-изотропной среде с вертикальной осью симметрии можно записать как функцию горизонтальной медленности  $p$  [10]

$$q_\alpha^2(p) = \frac{1}{\alpha_0^2} [1 - p^2 \alpha_0^2 (1 + 2\delta + S(p))], \quad (1)$$

где функция  $S(p)$  имеет вид

$$S(p) = -\frac{1 - \gamma_0^2}{8\gamma_0^2} p^2 \alpha_0^2 \frac{D}{\sqrt{Q(p)} + 1 + \frac{a}{2} p^2 \alpha_0^2} \quad (2)$$

с учетом

$$Q(p) = 1 + ap^2 \alpha_0^2 + bp^4 \alpha_0^4, \quad (3)$$

$$D = a^2 - 4b,$$

а параметры  $a$  и  $b$  определяются через анизотропные параметры Томсена [11]

$$a = \frac{4\gamma_0^2}{1 - \gamma_0^2} (\delta - \sigma), \quad (4)$$

$$b = \frac{4\gamma_0^4}{(1 - \gamma_0^2)^2} [2(1 - \gamma_0^2)\sigma + (\delta + \sigma)^2].$$

Параметр  $\sigma = (\epsilon - \delta)/\gamma_0^2$  определяет кинематическую поправку для  $qSV$ -волны;  $\epsilon$  и  $\delta$  – параметры анизотропии Томсена [11];  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  – вертикальные скорости  $qP$ - и  $qSV$ -волн соответственно;  $\gamma_0 = \beta_0/\alpha_0$  обозначает отношение вертикальных скоростей  $qP$ - и  $qSV$ -волн. Для вывода параметрических уравнений для расстоя-

ния источник–приемник и времени пробега волн необходимо ввести функцию  $H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{2} p \frac{dS(p)}{dp} = \frac{S(p)}{\sqrt{Q(p)}}. \quad (5)$$

Из уравнения (1) для вертикальной медленности получаем параметрические уравнения

$$x(p) = -2Z \frac{dq_\alpha(p)}{dp}, \quad (6)$$

$$t(p) = 2Z \left( q_\alpha - p \frac{dq_\alpha(p)}{dp} \right) = 2Zq_\alpha(p) + px(p),$$

где  $Z$  – мощность слоя. Первое уравнение в (6) выводится из определения нормали к поверхности медленности, второе уравнение в (6) определяет проекцию фазовой скорости на вектор групповой скорости.

Подставляя уравнение (1) и (5) в уравнение (6), получаем [12]

$$x(p) = 2Zp\alpha_0 \frac{1 + 2\delta + S(p) + H(p)}{\sqrt{1 - p^2\alpha_0^2(1 + 2\delta + S(p))}}, \quad (7)$$

$$t(p) = \frac{2Z}{\alpha_0} \frac{1 + p^2\alpha_0^2 H(p)}{\sqrt{1 - p^2\alpha_0^2(1 + 2\delta + S(p))}},$$

где  $S(p)$  определено в (2), а  $H(p)$  – в (5).

Аналогично можно найти фазовую скорость и фазовый угол

$$v_p^2(p) = \frac{1}{q_\alpha^2 + p^2} = \frac{\alpha_0^2}{1 - p^2\alpha_0^2(a_0 + S(p))}, \quad (8)$$

$$\sin^2 \theta(p) = p^2 v_p^2(p) = \frac{p^2 \alpha_0^2}{1 - p^2 \alpha_0^2 (a_0 + S(p))}.$$

### АКУСТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Известно, что распространение  $qP$ -волн в VTI среде не очень чувствительно к значению вертикальной скорости  $qS$ -волн. В акустическом приближении [1] функцию  $S(p)$  из уравнения (2) можно переписать в виде [13]

$$S(p) \approx \frac{2(\varepsilon - \delta)(1 + 2\delta)p^2\alpha_0^2}{1 - 2(\varepsilon - \delta)p^2\alpha_0^2}. \quad (9)$$

Подставляя уравнение (9) в формулу (1), получаем выражение для вертикальной медленности

$$q_\alpha^2 = \frac{1}{\alpha_0^2} \left[ 1 - \frac{(1 + 2\delta)p^2\alpha_0^2}{1 - 2(\varepsilon - \delta)p^2\alpha_0^2} \right]. \quad (10)$$

Функция  $H(p)$  из уравнения (5) в акустическом случае имеет форму

$$H(p) \approx \frac{2(\varepsilon - \delta)(1 + 2\delta)p^2\alpha_0^2}{(1 - 2(\varepsilon - \delta)p^2\alpha_0^2)^2}. \quad (11)$$

Подставляя уравнения (9) и (11) в выражение (7), получаем параметрические уравнения для удаления (расстояния источник–приемник) и времени пробега волны в одном слое VTI среды для акустического приближения

$$x(p) = \frac{pv_{nmo}^2 t_0}{(1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2)^{3/2} \sqrt{1 - (1 + 2\eta) p^2 v_{nmo}^2}},$$

$$t(p) = t_0 \frac{(1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2)^2 + 2\eta p^4 v_{nmo}^4}{(1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2)^{3/2} \sqrt{1 - (1 + 2\eta) p^2 v_{nmo}^2}}, \quad (12)$$

где двойное вертикальное время пробега  $t_0 = 2Z/\alpha_0$ , эффективная скорость  $v_{nmo} = \alpha_0 \sqrt{1 + 2\delta}$ , а параметр  $\eta$  соответствует анизотропному параметру аппроксимации времени пробега  $qP$ -волны из [14]

$$\eta = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta}. \quad (13)$$

Максимальное значение медленности определяется выражением

$$p_{\max} = \frac{1}{v_{nmo}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta}}. \quad (14)$$

При аппроксимации годографа отраженной волны первые два параметра ( $t_0$  и  $v_{nmo}$ ), полученные для акустического приближения в уравнении (12), совпадают со значениями соответствующих параметров для точных выражений (7). В то же время неоднородные параметры [10, 15] можно записать в более простой форме

$$S_2 = 1 + 8\eta, \quad (15)$$

$$S_3 = 1 + 8\eta + 32\eta^2.$$

Геометрическое расхождение имеет вид [16]

$$\left( \frac{x dx}{p dp} \right)^{1/2} = v_{nmo}^2 t_0 \times \frac{\sqrt{1 + 4\eta p^2 v_{nmo}^2 - 6\eta(1 + 2\eta)p^4 v_{nmo}^4}}{\left[ 1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2 \right]^2 \left[ 1 - (1 + 2\eta)p^2 v_{nmo}^2 \right]}, \quad (16)$$

а функция направленности [16, 17]

$$\cos \theta =$$

$$= \frac{(1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2)^{3/2} \sqrt{1 - (1 + 2\eta)p^2 v_{nmo}^2}}{\sqrt{(1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2)^3 (1 - (1 + 2\eta)p^2 v_{nmo}^2) + \frac{p^2 v_{nmo}^4}{\alpha_0^2}}}. \quad (17)$$

### ПЕТЛИ ВНЕ ОСИ СИММЕТРИИ

Положение петель (каустик) можно определить, проверив равенство нулю второй производной вертикальной медленности

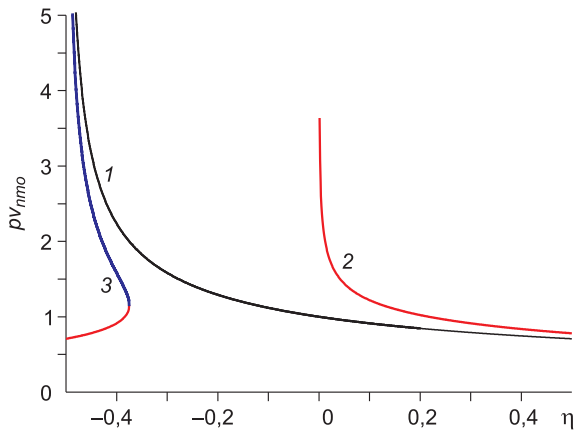
$$\frac{d^2 q_\alpha}{dp^2} = 0. \quad (18)$$

Для вертикальной медленности, заданной формулой (1), уравнение (18) не имеет решений для распространяющихся волн,  $|p| < p_{\max}$ . Однако, если в (18) подставить вертикальную медленность в акустическом приближении, заданную в (10), то мы получим решения (критические значения медленности)

$$p_{1,2} = \frac{1}{v_{nmo}} \frac{1}{\sqrt{-2\eta \pm \sqrt{2\eta(3 + 8\eta)}}}, \quad (19)$$

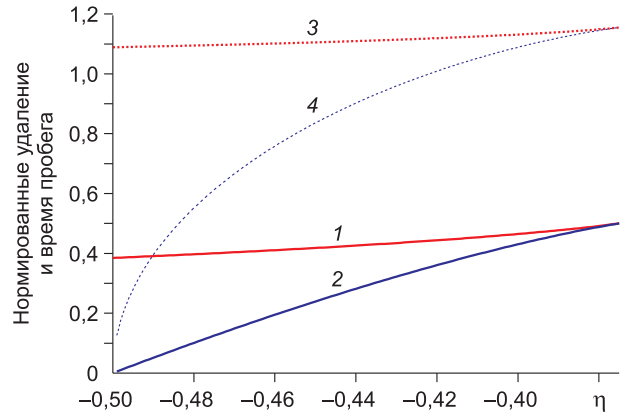
которые соответствуют решениям следующего квадратного уравнения

$$p^2 v_{nmo}^2 - \frac{2pv_{nmo}}{3(1 + 2\eta)} - \frac{1}{6\eta(1 + 2\eta)} = 0. \quad (20)$$



**Рис. 1.** Критические и максимальные значения  $pv_{nmo}$  как функции  $\eta$ :

1 – максимальная горизонтальная медленность для распространяющихся волн; 2 – первая и 3 – вторая каустика.



**Рис. 2.** Критические значения нормированных значений удаления и времени пробега как функции параметра  $\eta$ .

Нормированное удаление: 1 – первая и 2 – вторая каустика. Нормированное время пробега: 3 – первая и 4 – вторая каустика.

На рис. 1 приведены графики  $p_1$  и  $p_2$  из уравнения (19) и кривая значений максимальной медленности  $p_{\max}$  для распространяющихся волн из (14) как функции от  $\eta$ . Для распространяющихся волн ( $|p| \leq p_{\max}$ ) критические значения медленности появляются для параметра  $\eta$  в интервале:  $-0,5 \leq \eta \leq -0,375$ . Критические значения для горизонтальных медленностей равны

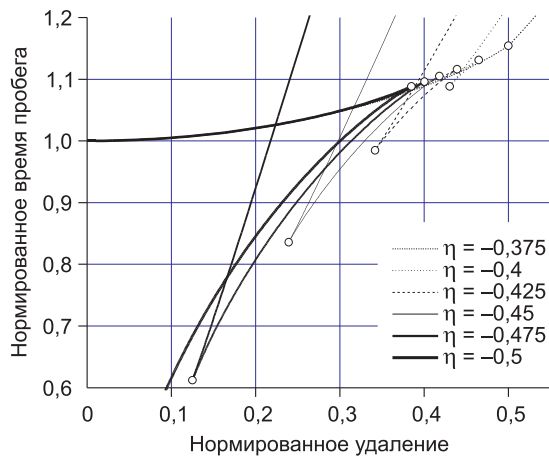
$$p_1 = p_2 = \frac{1}{v_{nmo}} \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ для } \eta = -\frac{3}{8}, \quad (21)$$

$$p_1 = \frac{1}{v_{nmo}} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_2 = p_{\max} = \infty \text{ для } \eta = -\frac{1}{2}.$$

Можно также найти критические значения нормированного удаления  $\tilde{x} = x/v_{nmo}t_0$  и времени пробега  $\tau = t/t_0$

$$\tilde{x}_{1,2} = \frac{1}{2}, \quad \tau_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ для } \eta = -\frac{3}{8}, \quad (22)$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \tau_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \text{ для } \eta = -\frac{1}{2}.$$

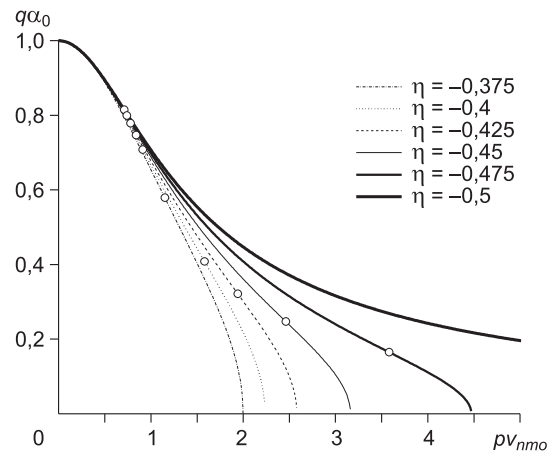


**Рис. 3.** Нормированное время пробега от нормированного удаления для  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$ . Здесь и далее критические значения показаны кружками.

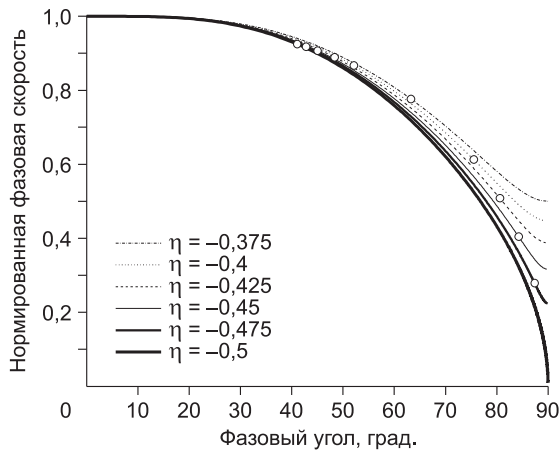
Отметим, что  $\tilde{x}_2 = \tau_2 = 0$  для  $\eta = -1/2$ . Графики критических значений нормированных удаления и времени пробега от параметра  $\eta$  представлены на рис. 2.

На рис. 3 приведены графики нормированного времени пробега  $\tau$  от нормированного удаления  $\tilde{x}$  для нескольких значений параметра  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$ . Для  $\eta = -0,375$  видно зарождение петли вне оси симметрии в точке, определяемой первым уравнением в (22). Для  $\eta = -0,5$  появляется петля на оси симметрии, которая задается вторым уравнением в (22). Для интервала  $-0,5 < \eta < -0,375$  петли вне оси симметрии находятся в интервалах удалений, показанных на рис. 2 (см. критические точки – кружки – на рис. 3).

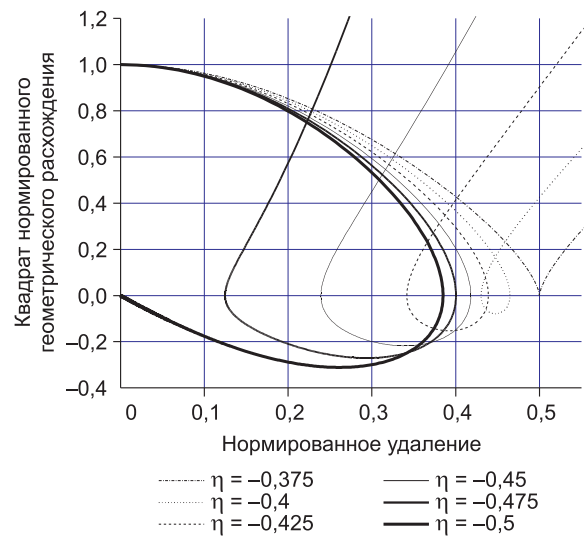
Нормированная фазовая поверхность (вертикальная компонента медленности умножена на вертикальную скорость, а горизонтальная компонента медленности – на эффективную скорость  $v_{nmo}$ ) вычисляется по формуле (9) и показана на рис. 4 для  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$  (критические точ-



**Рис. 4.** Нормализованная поверхность медленности для  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$ .



**Рис. 5.** Нормированная фазовая скорость как функция от фазового угла для  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$ .



**Рис. 6.** Нормированное относительное геометрическое расхождение как функция от нормированного удаления для  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$ .

ки – кружки – см. рис. 4). Видно, как кривизна фазовой поверхности связана с критическими точками. На рис. 5 приведены также графики зависимости нормированной фазовой скорости  $v/\alpha_0$  от фазового угла для нескольких значений  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$ . Уравнения для нормированной фазовой скорости и фазового угла (8) в акустическом приближении имеют вид

$$\frac{v}{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 v_{nmo}^2 \left( 1 - \gamma^2 + \frac{2\eta p^2 v_{nmo}^2}{1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2} \right)}},$$

$$\sin \theta = \frac{p v_{nmo} \gamma}{\sqrt{1 - p^2 v_{nmo}^2 \left( 1 - \gamma^2 + \frac{2\eta p^2 v_{nmo}^2}{1 - 2\eta p^2 v_{nmo}^2} \right)}},$$
(23)

где  $\gamma = \alpha_0/v_{nmo}$ . Для простоты возьмем  $\gamma = 1$ , что соответствует  $\delta = 0$ . Горизонтальная компонента скорости оказывается меньше вертикальной компоненты для отрицательных значений  $\eta$  и продолжает понижаться с уменьшением  $\eta$ . Из рис. 5 видно, что в присутствии каустики график фазовой скорости меняет знак кривизны в критических точках, которые находятся из соотношения

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ для } \eta = -\frac{3}{8},$$

$$\cos \theta_0 = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}, \text{ для } \eta = -\frac{1}{2},$$
(24)

что соответствует углам  $26,6^\circ$  и  $21,1^\circ$  соответственно. На рис. 6 показан квадрат нормированного относительного геометрического расхождения  $(L/v_{nmo}^2 t_0)^2$  как функция нормированного удаления для  $\eta = -0,375; -0,4; -0,425; -0,45; -0,475; -0,5$ . Кривые пересекают горизонтальную ось удалений в точках, которые соответствуют критическим удалениям. Это значит, что в присутствии каустик геометрическое расхождение становится комплексной величиной.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведены условия образования нефизических каустик  $qP$ -волн вне оси симметрии ВТИ среды. Критическое значение параметра неэллиптичности составляет  $\eta = -0,375$ . При появлении каустик геометрическое расхождение становится комплексной величиной, а кривизна графика фазовой скорости меняет знак. Приведены также аналитические выражения для положения каустик в  $(t-x)$  области.

Автор благодарен Tariq Alkhalifah за ценные замечания по работе.

*Работа выполнена при финансовой поддержке проекта ROSE.*

## Литература

1. Alkhalifah, T. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media // *Geophysics*. 1998. V. 63. P. 623–631.
2. Alkhalifah, T. The offset-midpoint traveltime equation for transversely isotropic media // *Geophysics*. 2000. V. 65. P. 1316–1325.
3. Dewangan, P. and Tsvankin, I. Velocity-independent layer stripping of  $PP$  and  $PS$  reflection traveltimes // *Geophysics*. 2006. V. 71, N 4. P. U59–U65.
4. Wang, X. and Tsvankin, I. Estimation of interval anisotropy parameters using velocity-independent layer stripping // *Geophysics*. 2009. V. 74, N 5. P. WB117–WB127.
5. Douma, H. and van der Baan, M. Rational interpolation of  $qP$ -traveltimes for semblance-based anisotropy estimation in layered VTI media // *Geophysics*. 2008. V. 73, N 4. P. D53–D62.
6. Douma, H., Jenner, E., and Haney, M. Semblance – based interval VTI parameter estimation: a comparison of methods // *SEG Expanded Abstracts*. 2010. V. 29. P. 328–332.
7. Stovas, A. Direct Dix-type inversion in a layered VTI medium // *J. Geophys. Eng.* 2010. V. 8. P. 1–5.
8. van der Baan, M., and Kendall, J.M. Estimating anisotropy parameters and travel-times in the tau-p domain // *Geophysics*. 2002. V. 67. P. 1076–1086.

9. **Casasanta, L. and Fomel, S.** Velocity-independent tau- $p$  moveout in a vertically-varying VTI medium // *Geophysics*. 2011. V. 76, N 4. P. U45–U57.
10. **Ursin, B. and Stovas, A.** Traveltime approximations for a layered transversely isotropic medium // *Geophysics*. 2006. V. 71, N 2. P. D23–D33.
11. **Thomsen, L.** Weak elastic anisotropy // *Geophysics*. 1986. V. 51. P. 1954–1966.
12. **Stovas, A. and Ursin, B.** Reflection and transmission responses of layered transversely isotropic visco-elastic media // *Geophys. Prospect*. 2003. V. 51. P. 447–477.
13. **Stovas, A. and Roganov, Yu.** Slowness-surface approximations for  $qSV$ -waves in transversely isotropic media // *Geophys. Prospect*. 2009. V. 57, N 1. P. 1–11.
14. **Alkhalifah, T. and Tsvankin, I.** Velocity analysis for transversely isotropic media // *Geophysics*. 1995. V. 60. P. 1550–1566.
15. **Fomel, S. and Grechka, V.** Nonhyperbolic reflection moveout of  $P$ -waves. An overview and comparison of reasons // Report CWP-372. Colorado School of Mines. 2001.
16. **Stovas, A. and Ursin, B.** Improved geometrical spreading approximations in layered transversely isotropic media // *Geophysics*. 2009. V. 74, N 5. P. D85–D95.
17. **Ursin, B. and Hokstad, K.** Geometrical spreading in a layered transversely isotropic medium with vertical symmetry axis // *Geophysics*. 2003. V. 68. P. 2082–2091.
18. **Fowler, P.J., Jackson, A., Gaffney, J., and Boreham, D.** Direct nonlinear traveltime inversion in layered VTI media // SEG Expanded Abstracts. 2008. V. 27. P. 3028–3032.

#### КОРОТКО ОБ АВТОРЕ

*СТОВАС Алексей* – профессор факультета нефтепромыслового дела и прикладной геофизики, Норвежский университет науки и технологии, Норвегия.  
E-mail: alexey.stovas@ntnu.no