



## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ОТРАЖЕНИЯ–ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ЛИНЕЙНО-УПРУГОГО И НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВ

А.А. Глебов

ООО “ЛУКОЙЛ-Инжиниринг”, 127055, Москва, ул. Сущевский вал, д. 2, Россия,  
e-mail: Aleksey.A.Glebov@lukoil.com

Приведен ряд результатов экспериментального изучения продольных волн, распространяющихся в нелинейной геологической среде. Анализ выявленных особенностей волнового поля выполнен в рамках пятиконстантной теории упругости Гука–Мурнагана. Опираясь на точное математическое описание процесса отражения–преломления вторых гармоник плоских продольных волн, вертикально падающих на границу линейно-упругого и нелинейно-упругого полупространств, обоснована возможность выявления нелинейных эффектов в поле отраженных волн.

*Отражение–преломление вторых гармоник, пятиконстантная теория упругости Гука–Мурнагана, нелинейные искажения, продольная волна, произвольная форма сигнала*

### REFLECTION-TRANSMISSION NONLINEAR SECOND-ORDER EFFECTS FOR P-WAVE VERTICALLY IMPINGING THE BOUNDARY BETWEEN LINEAR AND NONLINEAR ELASTIC HALF-SPACES

A.A. Glebov

LLC “LUKOIL-Engineering”, str. Sushevsky Val, 2, Moscow, 127055, Russia,  
e-mail: Aleksey.A.Glebov@lukoil.com

Some results of *P*-wave propagation in nonlinear medium are suggested in present paper. Wave field analysis is carried out using five-constant elastic theory of Hooke–Murnaghan. Exact mathematical description is used for the second harmonics of reflection-transmission for a plain *P*-wave vertically impinging the boundary between linear and nonlinear elastic half-spaces. Nonlinear effects are identified for the reflected wave field in the linear layer.

*Second harmonics of reflection-transmission, five-constant elastic theory of Hooke–Murnaghan, nonlinear distortion, P-wave, arbitrary seismic signal*

### ВВЕДЕНИЕ

Геологическая среда представляет собой сложно построенную структуру, характеризующуюся неоднородным напряженным состоянием, наличием границ контрастного изменения физико-химических свойств горных пород, существованием трещиноватости и порового пространства, содержащих различные флюиды (пластовая вода, нефть, газ). Несмотря на эти факты, используемая на практике теория колебаний и распространения волн построена из предположений о сплошности среды, линейности закона Гука, а также малости деформаций, на основании чего в разложении упругой энергии в ряд по степени тензора деформации отбрасываются члены третьего порядка и выше. Следствием любого отклонения от данных постулатов линейной теории упругости становится появление нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями, деформациями и внутренней энергией среды и т. д. Данные нелинейные взаимосвязи [1] приводят уже, в свою очередь, к нелинейным уравнениям движения в среде, решение которых не может быть представлено в виде простых гармонических решений.

Большинство исследователей [1, 2] в области теоретического изучения нелинейности сред основывают свои изыскания на модели *пятиконстантной теории упругости Гука–Мурнагана*. Эта теория фактически является первой, которую ученые стали использовать для объяснения проявлений нелинейности сейсмического волнового поля в реальной среде.

Для нелинейной теории упругости Гука–Мурнагана внутренняя энергия – это положительно определенная инвариантная (к координатным преобразованиям) функция компонент тензора деформаций. В первоначально-изотропных нелинейных средах для выполнения условия инвариантности необходимо, чтобы внутренняя энергия  $W$  зависела от трех инвариантов тензора деформации [2]:

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \quad (1)$$

где

$$I_1 = u_{ll}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(u_{ll}^2 - u_{ik}^2),$$

$$I_3 = |u_{ik}| = \frac{1}{3} \left( u_{ik} u_{ll} u_{ll} - \frac{3}{2} u_{ik}^2 u_{ll} + \frac{1}{2} u_{ll}^3 \right), \quad i, k, l = 1, 2, 3.$$

Разлагая положительно-определенную функцию (1) в степенной ряд с точностью до величин третьего порядка малости, получим

$$W = W(0, 0, 0) + \frac{\partial W}{\partial I_1} \Big|_0 I_1 + \left( \frac{\partial W}{\partial I_2} \Big|_0 I_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \Big|_0 I_1^2 \right) + \left( \frac{\partial W}{\partial I_3} \Big|_0 I_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} \Big|_0 I_1 I_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 W}{\partial I_1^3} \Big|_0 I_1^3 \right). \quad (2)$$

Следуя [2], введем следующие обозначения производных внутренней энергии по инвариантам тензора деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I_2} \Big|_0 &= -2\mu; & \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2} \Big|_0 &= K + \frac{4}{3}\mu; \\ \frac{\partial W}{\partial I_3} \Big|_0 &= n = A; & \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2} \Big|_0 &= -4m = -2A - 4B; \\ \frac{\partial^3 W}{\partial I_1^3} \Big|_0 &= 4m + 2l = 2A + 6B + 2C. \end{aligned} \quad (3)$$

Как видно из формул (3), для описания нелинейных свойств изотропного твердого тела во втором приближении помимо двух линейных постоянных Ламе – модуля всестороннего сжатия  $K$  и модуля сдвига  $\mu$  (модулей второго порядка) – необходимо ввести еще три нелинейных постоянных Мурнагана ( $m, l, n$  – модули третьего порядка).

В этих обозначениях компоненты обобщенного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  выражаются следующими формулами [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \left( K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ik} + \\ &+ \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \frac{K - \frac{2}{3}\mu + B}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] + \frac{A}{4} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \\ &+ \frac{B}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + C \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пользуясь (4), для уравнения движения в среде Гука–Мурнагана получим

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} &= F_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $F_i$  –  $i$ -я компонента объемной силы, являющаяся величиной второго порядка малости относительно производных от смещения по координатам [2]:

$$\begin{aligned} F_i &= \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \\ &+ \left( K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \\ &+ \left( K - \frac{2\mu}{3} + B \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \left( \frac{A}{4} + B \right) \times \\ &\times \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + (B + 2C) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Описанная выше теоретическая модель начально-изотропного нелинейно-упругого тела с удержанными членами второго порядка в приближении (2) называется пятиконстантной. Естественно, что в пятиконстантной теории упругости, так же как и в линейной теории, твердые тела предполагаются идеально упругими, т. е. между напряжениями и деформациями существует взаимно однозначное соответствие; такие явления, как текучесть, упругий гистерезис, из рассмотрения исключаются.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ПЛОСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЯТИКОНСТАНТНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим нелинейные искажения волнового поля, которые происходят при распространении сейсмических волн в пятиконстантной среде Гука–Мурнагана. Пятиконстантная теория упругости является, по существу, нелинейной теорией с учетом величин второго порядка. Поэтому здесь используют метод малого параметра [2], представляя вектор смещения в следующем виде:

$$u = u' + u'' + \dots, \quad (7)$$

где  $u'$  – вектор смещения в первом (линейном) приближении;  $u''$  – вектор смещения во втором (квадратично-нелинейном) приближении, малый по сравнению с  $u'$ . Тогда из (5) получим уравнение первого приближения [2]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} - \mu \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_l^2} - \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_l \partial x_l} = 0 \quad (8)$$

и уравнение второго приближения

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u''_i}{\partial t^2} - \mu \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u''_i}{\partial x_l^2} - \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \sum_{l=1}^3 \frac{\partial^2 u''_i}{\partial x_l \partial x_l} = F'_i, \quad (9)$$

где  $F'_i = F_i(u')$ .

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в сплошной среде вдоль оси  $x$ , вектор смещения в этом случае равен

$$u(x, t) = k_x u_1(x, t) + k_y u_2(x, t) + k_z u_3(x, t). \quad (10)$$

Здесь индексом 1 отмечены смещения вдоль оси  $x$ , индексом 2 – вдоль  $y$ , индексом 3 – вдоль  $z$ . Уравнения первого приближения, согласно (8), в этом случае представляют три волновых уравнения, одно из которых – для продольной волны, распространяющейся со скоростью  $c_l$ , и два других – для поперечных волн, распространяющихся со скоростью  $c_t$ :

$$c_l = \sqrt{\frac{K + \frac{4\mu}{3}}{\rho_0}} \quad \text{и} \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}.$$

Уравнения второго приближения, описывающие перекачку упругой энергии при нелинейном взаимодействии плоских сейсмических волн на  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -компонентах, получаются из (9) и (6):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u''_1}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u''_1}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x^2} \frac{\partial u'_1}{\partial x} + \tau \left( \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x^2} \frac{\partial u'_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'_3}{\partial x^2} \frac{\partial u'_3}{\partial x} \right), \quad (11)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u''_2}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u''_2}{\partial x^2} = \tau \left( \frac{\partial^2 u'_2}{\partial x^2} \frac{\partial u'_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x^2} \frac{\partial u'_2}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3''}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u_3''}{\partial x^2} = \tau \left( \frac{\partial^2 u_3'}{\partial x^2} \frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2} \frac{\partial u_3'}{\partial x} \right), \quad (13)$$

где  $\alpha = K + \frac{4}{3}\mu$ ;  $\beta = 3\alpha + 2A + 6B + 2C$ ;  $\tau = \alpha + \frac{A}{2} + B$ .

Если в первом приближении распространяется только одна продольная составляющая плоской волны  $u_1 \neq 0$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ , то система уравнений (11)–(13) переходит в одно уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_1''}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 u_1''}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial^2 u_1'}{\partial x^2} \frac{\partial u_1'}{\partial x}. \quad (14)$$

Это уравнение совпадает со вторым приближением уравнений гидродинамики в переменных Лагранжа. Л.К. Зарембо и В.А. Красильниковым [2] показано, что при гармоническом возбуждении сейсмических сигналов, т. е. при известном граничном условии  $u_1'(0, t) = U_0(1 - \cos \omega t) = U_0 f_1(\omega t)$ , второе приближение будет описывать появление в волновом поле кратной гармоники с удвоенной частотой и линейно увеличивающейся с расстоянием источник–приемник интенсивностью

$$u_1'' = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{k_l^2 x U_0^2}{8} [1 - \cos 2(\omega t - k_l x)], \quad (15)$$

где  $k_l = \omega / c_l = 2\pi / \lambda_l$  – волновое число продольных волн;  $\lambda_l$  – длина волны продольной поляризации.

Решение Зарембо–Красильникова (15), описывающее появление в среде второй гармоники, несложно обобщить на произвольный случай немонохромного импульсного возбуждения сейсмических сигналов:

$$u_1''(x, t) = U_0 f_1 \left( t - \frac{x - x_0}{c_l} \right). \quad (15)$$

В этом случае уравнение (15) имеет следующее аналитическое решение:

$$u_1''(x, t) = -\frac{\beta}{\alpha} \frac{(x - x_0) U_0^2}{2c_l^2} f_2 \left( t - \frac{x - x_0}{c_l} \right), \quad (16)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_1(t)}{\partial t} \right)^2. \quad (17)$$

Таким образом, из (7) и (16) для плоской продольной волны в пятиконстантной среде следует, что

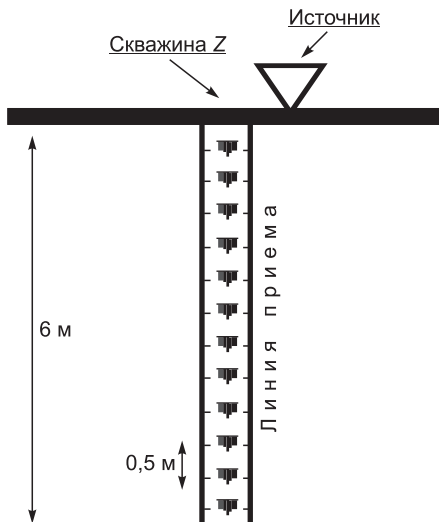


Рис. 1. Схема сейсмического эксперимента.

ее вектор смещений во втором приближении имеет вид

$$u_1(x, t) = U_0 f_1 \left( t - \frac{x - x_0}{c_l} \right) - \frac{\beta}{\alpha} \frac{(x - x_0) U_0^2}{2c_l^2} f_2 \left( t - \frac{x - x_0}{c_l} \right) + \dots \quad (18)$$

Полученное приближенное представление волнового поля плоской продольной волны в пятиконстантной среде (18) является обобщением гармонического решения Зарембо–Красильникова (15) на случай произвольного сейсмического источника:  $u_1(x_0, t) = U_0 f_1(t)$ .

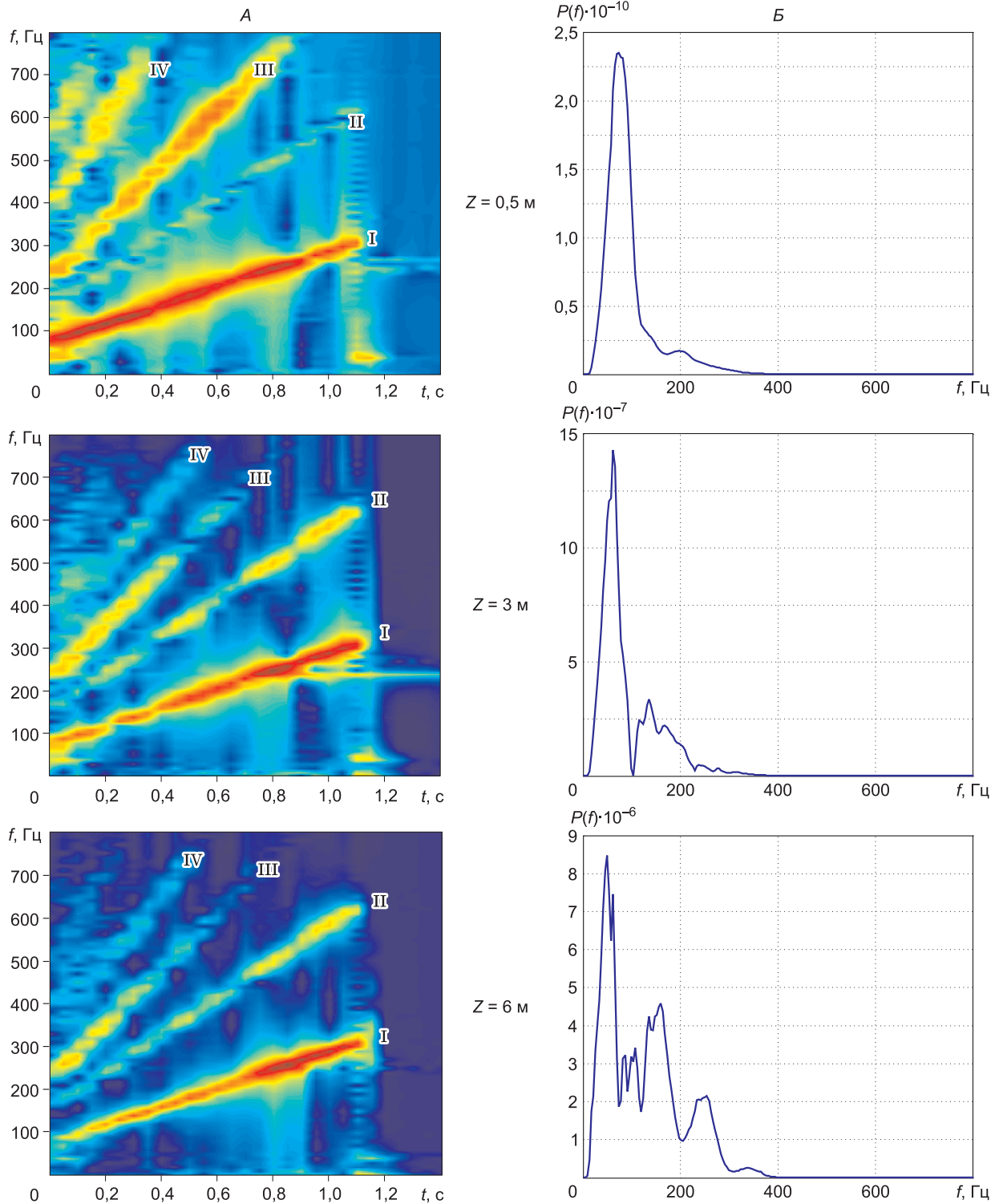
## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО НАБЛЮДАЕМЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИСКАЖЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ ИСТОЧНИКА

Большинство экспериментальных исследований упругих свойств среды основаны на изучении продольных проходящих и отраженных волн в дальней зоне. Применительно к изучению нелинейно-упругих свойств из общеизвестных теоретических предположений понятно, что нелинейные искажения волнового поля должны присутствовать не только в дальней, но и наиболее значимо в ближней зоне источника. Правильное понимание происходящих в этой части пространства физических процессов может привести к переоценке и более правильной расстановке приоритетов в изучении нелинейных эффектов на всем пути распространения сейсмических волн.

С целью выявления нелинейных искажений, описываемых зависимостью (18), автор использовал экспериментальный материал, полученный В.И. Юшиным и К.Б. Квасовым в ближней зоне двух сейсмических источников: ударно-импульсного и вибрационного [3–5].

Возбуждение сейсмических волн осуществлялось на расстоянии 0,5 м от устья наблюдательной скважины. Вертикальные Z-сейсмоприемники были установлены в вертикальную скважину глубиной 6 м с шагом 0,5 м. Регистрация вибрационных и импульсных сейсмограмм производилась с шагом дискретизации 0,5 мс. Система наблюдений изображена на рис. 1.

Для анализа экспериментальных вибрационных и импульсных данных использовался стандартный спектральный анализ и спектрально-временной анализ виброграмм с расчетом спектров Фурье в постоянном скользящем временном окне (рис. 2). Спектрально-временное представление виброграмм, предложенное Д.В. Скоринским, позволяет преобразовывать свип-сигналы с линейной (по времени) разверткой излучающей частоты в наклонные линии на плоскости частота–время. Из рис. 2, А видно, что нелинейные искажения субгармонических сейсмических сигналов в ближней зоне источника наиболее значимо присутствуют в виде амплитудного доминирования нечетных кратных гармоник над четными. С увеличением расстояния источник–приемник эффект “относительного гашения четных гармоник” исчезает, и амплитуды гармоник начинают монотонно уменьшаться с повышением кратности. Для импульсных сигналов (см. рис. 2, Б) эффект относительного роста высокочастотных составляющих с увеличением расстояния также нельзя локализовать только нелинейным взаимодействием “источник–грунт”.



**Рис. 2.** Сопоставление спектральных характеристик вибрационного (А) и импульсного (Б) источников при различных расстояниях до вертикально расположенных сейсмоприемников:

I–IV – порядковые номера гармоник.

Таким образом, на основе специально поставленного полевого эксперимента в ближней зоне импульсного и вибрационного источников [3–5] был установлен предсказуемый нелинейной теорией (18) относительный рост (с увеличением расстояния) вы-

сокочастотных (“кратно-гармонических”) колебаний в спектре сейсмического сигнала.

Отсюда следует, что ни абсолютная величина деформаций, ни геометрическая близость к очагу возбуждения не являются главными определяющими



причинами нелинейных искажений продольных волн сигналов ближней зоны – основное значение здесь имеют нелинейно-упругие свойства самой среды распространения.

Эти фундаментальные эффекты – важное экспериментальное доказательство наличия нелинейных упругих свойств в реальных геологических средах и возможности их практического изучения на основе пятиконстантной теории упругости Гука–Мурнагана.

Для экспериментального оценивания нелинейно-упругих характеристик среды автором была предложена полиномиально-сверточная модель сейсмической трассы [6]:

$$U_i = R1_{i-k}S_k + R2_{i-k}S_k^2 + R3_{i-k}S_k^3 + \dots + RM_{i-k}S_k^M + \dots, \\ U(t) = R1(t) \otimes S(t) + \\ + R2(t) \otimes S^2(t) + \dots + RM(t) \otimes S^M(t) + \dots, \quad (19)$$

где  $\otimes$  – операция свертки. Модель полиномиальной свертки (19), полученная автором на основе разложения в ряд Тейлора сейсмического отклика  $U(t)$  нелинейно-упругой среды  $R(t)$  на зондирующий импульс  $S(t)$ , обнаружила отличия своей математической структуры от теоретического представления поля проходящих продольных волн (18).

### 3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВТОРЫХ ГАРМОНИК ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН НА ЖЕСТКОКОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЕ ЛИНЕЙНО-УПРУГОГО И НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВ (СЛУЧАЙ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ)

Рассмотрев нелинейные эффекты, вызванные распространением волнового поля в нелинейном пятиконстантном пространстве, изучим другой аспект распространения сейсмических волн в среде, содержащей границу раздела. Этот случай относится к явлениям отражения и преломления вертикально падающей продольной волны на жесткоконтактную границу линейно-упругого и нелинейно-упругого полупространств (рис. 3).

Рассмотрение более сложных вариантов, например, границы двух нелинейных полупространств или невертикального подхода лучей к границе, выходит за рамки настоящей работы.

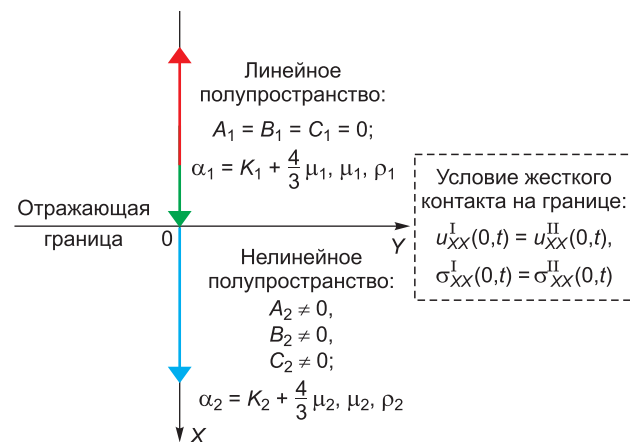


Рис. 3. Модель отражающей границы между линейным и нелинейным полупространствами.

Итак, запишем нелинейное уравнение движения (5) и (6), пренебрегая  $K$  и  $\mu$  по сравнению с  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , т. е.:

$$K, \mu \ll A, B, C, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \left( K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = F_i(u) = \\ = \frac{A}{4} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \\ + \left( \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + B \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \\ + \left( \frac{A}{4} + B \right) \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \\ + (B + 2C) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (20)$$

Проведя аналогичные упрощения в выражении (4) для тензора напряжений, получим

$$\sigma_{ik} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \left( K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ik} + \\ + \frac{A}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \\ + \frac{B}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] + \frac{A}{4} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \\ + \frac{B}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + C \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \delta_{ik}. \quad (21)$$

Физически такое упрощение означает пренебрежение эффектами, обусловленными нелинейностью тензора деформаций, по сравнению с эффектами, обусловленными нелинейностью закона Гука. Соответственно из этого и (7), (21) получим уравнение для тензора напряжений деформаций первого приближения

$$\sigma_{ik} = \mu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) + \left( K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \delta_{ik} \quad (22)$$

и уравнение для тензора напряжений деформаций второго приближения

$$\sigma_{ik} = \mu \left( \frac{\partial u''_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u''_k}{\partial x_i} \right) + \left( K - \frac{2\mu}{3} \right) \frac{\partial u''_i}{\partial x_i} \delta_{ik} + \\ + \frac{A}{4} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right) + \\ + \frac{B}{2} \left[ \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \right)^2 \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right] + \frac{A}{4} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \\ + \frac{B}{2} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_m}{\partial x_i} \delta_{ik} + 2 \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right) + C \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)^2 \delta_{ik}. \quad (23)$$

Рассмотрим нормальное падение плоской продольной волны на границу между линейным полупространством и нелинейным, описываемым пятиконстантной теорией упругости (см. рис. 1).

Решение для смещений в верхнем и нижнем полупространствах, согласно (7), будем искать в виде

$$u_1^I(x, t) = U_0 f_1 \left( t - \frac{x}{c_l} \right) - R f_1 \left( t + \frac{x}{c_l} \right) - R N f_3 \left( t + \frac{x}{c_l} \right), \quad (24)$$

Слагаемые, описывающие линейное взаимодействие волны с границей (первое приближение)

Слагаемое, описывающее нелинейное взаимодействие волны с границей (второе приближение)

$$u_1^{II}(x, t) = \underbrace{Pf_1 \left( t - \frac{x}{c_1^{II}} \right)}_{\substack{\text{Слагаемое, описывающее} \\ \text{линейное взаимодействие} \\ \text{волны с границей} \\ \text{(первое приближение)}}} - \underbrace{\frac{\beta}{\alpha} \frac{k_I^2 x P^2}{2} f_2 \left( t - \frac{x}{c_1^{II}} \right)}_{\substack{\text{Слагаемое, описывающее} \\ \text{нелинейную добавку при} \\ \text{распространении волны в} \\ \text{пятиконстантной среде} \\ \text{(второе приближение)}}} + \underbrace{PNf_3 \left( t - \frac{x}{c_1^{II}} \right)}_{\substack{\text{Слагаемое, описы-} \\ \text{вающее нелинейное} \\ \text{взаимодействие волны} \\ \text{с границей (второе} \\ \text{приближение)}}}, \quad (25)$$

где  $U_0$  – амплитуда падающей волны;  $R$  – амплитуда отраженной волны;  $RN$  – амплитуда нелинейно-отраженной волны;  $P$  – амплитуда преломленной волны;  $PN$  – амплитуда нелинейно-преломленной волны;  $c_I$  – скорость;  $\rho_0 c_I = \frac{\alpha}{c_I}$  – импеданс продольной волны.

Запишем граничные условия на границе  $x = 0$  для первого и второго приближений. На границе должны выполняться условия непрерывности смещений и компонент тензора напряжений  $\sigma_{11}$ , т. е.

$$u_1^I|_{x=0} = u_1^{II}|_{x=0},$$

$$\sigma_{11}^I|_{x=0} = \sigma_{11}^{II}|_{x=0},$$

$$\left. \frac{\partial u_1^I}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{U_0}{c_I} f_1'(t) - \frac{R}{c_I} f_1'(t) - \frac{RN}{c_I} f_3'(t), \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial u_1^{II}}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{P}{c_1^{II}} f_1'(t) - \frac{\beta^{II}}{2\alpha^{II}} \left( \frac{P}{c_1^{II}} \right)^2 f_2(t) - \frac{PN}{c_1^{II}} f_3'(t),$$

$$\sigma_{11}^I|_{x=0} = \alpha^I \left. \frac{\partial u_1^I}{\partial x} \right|_{x=0} = \left( \alpha^{II} \left. \frac{\partial u_1^{II}}{\partial x} \right|_{x=0} + \frac{\beta^{II}}{2} \left( \left. \frac{\partial u_1^{II}}{\partial x} \right|_{x=0} \right)^2 \right) \Big|_{x=0} = \sigma_{11}^{II}|_{x=0}.$$

Подставляя (24), (25) в (26) с использованием (22), получаем для первого приближения следующие граничные условия:

$$U_0 - R = P, \quad (27)$$

$$\alpha^I \frac{U_0}{c_I} + \alpha^I \frac{R}{c_I} = \alpha^{II} \frac{P}{c_1^{II}}, \quad \rho_0^I c_I^I (U_0 + R) = \rho_0^{II} c_1^{II} P, \quad (28)$$

и для второго приближения, подставляя (24), (25) в (26) с использованием (22), получаем

$$-RN = PN, \quad (29)$$

$$-\alpha^I \frac{RN}{c_I} f_3'(t) = -\frac{\beta^{II}}{2} \left( \frac{P}{c_1^{II}} \right)^2 f_2(t) - \alpha^{II} \frac{PN}{c_1^{II}} f_3'(t) + \frac{\beta^{II}}{2} \left( \frac{P}{c_1^{II}} f_1'(t) \right)^2. \quad (30)$$

Из (27) и (28) получаем

$$R = \frac{\rho_0^{II} c_1^{II} - \rho_0^I c_I^I}{\rho_0^{II} c_1^{II} + \rho_0^I c_I^I} U_0, \quad (31)$$

$$P = \frac{2\rho_0^I c_I^I}{\rho_0^{II} c_1^{II} + \rho_0^I c_I^I} U_0. \quad (32)$$

Из (29) и (30), согласно (26), при условии

$$f_3'(t) = f_2(t) = \frac{1}{2} (f_1'(t))^2 \quad (33)$$

получаем

$$RN = -PN = -\frac{\beta^{II}}{2(\rho_0^{II} c_1^{II} + \rho_0^I c_I^I)} \left( \frac{P}{c_1^{II}} \right)^2. \quad (34)$$

Показано, что при отражении от границы между линейным и нелинейным идеально упругими полупространствами (при вертикальном падении продольной волны) в линейном полупространстве возникает нелинейная продольная составляющая волнового поля (24), динамика которой полностью описывается выражениями (33), (34). В частности, для монохроматического сигнала  $\omega_0$ , нормально падающего на такую границу, регистрируемая нелинейная составляющая отраженного волнового поля будет содержать нулевую и удвоенную  $\omega_0$  частоты.

Формула (34) фактически обосновывает принципиальную возможность изучения нелинейных свойств среды на основе интерпретации стандартных сейсмо-разведочных данных об однократно отраженных волнах, а формула (33) теоретически обеспечивает оценку формы импульса нелинейно-отраженной волны при известной форме линейно-отраженного сигнала.

Формулы (33), (34) получены автором в 2006 г. в ходе подготовки магистерской диссертации под научным руководством академика С.В. Гольдина. Они позволили показать, что ранее известная математическая структура нелинейных искажений проходящих продольных волн (18) отличается от структуры нелинейно-отраженной волны (24) дифференцированием сейсмического сигнала (33).

\* \* \*

Таким образом, показано, что главной особенностью восходящего поля отраженных волн, измеряемого скоростью смещения  $\partial u(t) / \partial t$ , является существование нелинейной полиномиальной составляющей второго порядка

$$\partial u(t) / \partial t = R \partial f(t + x/c_I) / \partial t + RN (\partial f(t + x/c_I) / \partial t)^2 / 2. \quad (35)$$

Практическое значение полученного результата (35) состоит в физическом обосновании математической модели полиномиальной свертки (19)

$$\partial u(t) / \partial t = RI(t) \otimes S(t) + R2(t) \otimes S^2(t) + \dots + RM(t) \otimes S^M(t) + \dots,$$

предложенной автором [6] для экспериментального оценивания нелинейно-упругих характеристик нефтегазосносных объектов различного морфолого-генетического типа.

## Литература

1. **Проблемы** нелинейной сейсмоки / Под ред. А.В. Николаева. М.: Наука, 1987. 255 с.
2. **Зарембо Л.К., Красильников В.А.** Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
3. **Юшин В.И., Квасов К.Б., Сапрыкин И.В.** Экспериментальное измерение сейсмической энергии невзрывного импульсного источника по записи колебаний внутри среды // Физ. мезомех. 2005. Т. 8, № 1. С. 37–44.
4. **Глебов А.А.** Математическое исследование нелинейных искажений сейсмических сигналов в пятиконстантных средах // Рос. геофиз. журн. 2006. № 43–44. С. 10–16.
5. **Glebov A.A., Goldin S.V., Mitrofanov G.M.** Some Nonlinear Effects Observed in Seismic Examples // Ext. Abstr., Session Non-Conventional Seismic. Vienna, EAGE, 2006. P054.5
6. **Глебов А.А.** Полиномиально-сверточная модель сейсмической трассы // Геофизика. 2006. № 3. С. 9–18.