



**В. Л. Трофимов**  
**Ф. Ф. Хазиев**  
**Д. И. Черников**

ООО "МЕГАЦЕНТР-ПЛЮС", МОСКВА  
ООО "МЕГАЦЕНТР-ПЛЮС", МОСКВА  
ООО "МЕГАЦЕНТР-ПЛЮС", МОСКВА

## **РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ РАЗРЕЗОВ ДЛЯ РЯДА СКОРОСТНЫХ ФУНКЦИЙ $V(z)$ И $V(x, z)$**

**АННОТАЦИЯ.** Приводятся алгоритмы и рассмотрены особенности решения прямых и обратных кинематических задач сейсмологии для некоторых скоростных функций  $V(x)$  и  $V(x, z)$ . Часть описанных алгоритмов известна. Другая часть, разработанная и опробованная авторами на модельных и фактических материалах наблюдений, позволяет расширить класс используемых моделей реальной среды.

При изучении глубинного строения реальных геологических сред сейсмическими методами, прежде всего при решении задач структурного картирования, для повышения достоверности структурных построений, выделения малоамплитудных структур, получения параметров тектонических элементов и локальных объектов, необходимо применение как минимум двух способов извлечения информации из сейсмических данных. Во-первых, необходимо иметь достаточно точные данные о скоростях распространения упругих волн. Во-вторых - адекватные создаваемым в реальных средах волновым процессам алгоритмы и методы преобразования сейсмических разрезов, позволяющие реализовать надёжные структурные построения и на этой основе выполнить достоверную интерпретацию глубинного строения изучаемого разреза.

Имеются решения прямых и обратных задач теории преобразования разрезов лишь для моделей однородной, однородно-слоистой сред и среды с линейным законом изменения скорости с глубиной (Плотов О. К., 1974; Облогина Т. И., Пийп В. Б., Юдасин Л. А., Иванов О. П., 1972; Varanek B., Sounkova M., 1968 и др.). Разработан также целый ряд численных алгоритмов изучения кинематических особенностей волн и построения глубинных разрезов в двумерно-неоднородных средах (Гурьянов В. М., 1965; Облогина Т. И., Пийп В. Б., Юдасин Л. А., Иванов О. П., 1966 - 1976; Коробов Б. И.,

**ABSTRACT.** Algorithms are presented and solution is considered to forward and inverse traveltime problems for a series of  $V(x)$  and  $V(x, z)$  velocity functions. Some of the algorithms described here are known, some other are developed and tested by the authors on both model data and real data, and allow a broader class of real subsurface models to be used.

1974; Мири-Заде С. А. 1968; Пилипенко В. Н., 1976; Sattlegger J. W., 1964 и др.).

При решении практических задач построения глубинных разрезов нередко пользуются каким-то одним из способов преобразования временных кинематических разрезов в глубинные в зависимости от сложности геологического строения изучаемого разреза. Получаемые при этом результаты построений не всегда отличаются высокой точностью и технологичностью. Причиной этого, очевидно, является прежде всего отсутствие достаточно надёжных машинных алгоритмов преобразования разрезов, позволяющих сделать выбор, отвечающий альтернативным требованиям (оперативности получения результатов и упрощённой скоростной модели разреза или менее оперативного способа получения результатов и более сложного учёта параметров двумерно-неоднородной модели среды), а также отсутствие работ обобщающего характера, в которых последовательно излагаются основные особенности таких преобразований.

В нашей работе даётся описание алгоритмов решения сначала прямых, а затем обратных задач преобразования глубинных и временных кинематических разрезов для ряда моделей скорости  $V(z)$  и  $V(x, z)$ . Часть из них известна (Облогина Т. И., Пийп В. Б., Юдасин Л. А., Иванов О. П., 1972; Мири-Заде С. А., 1968; Varanek B., Sounkova M., 1968), другая - разработана и оп-

робована нами на модельных и производственных материалах.

**АЛГОРИТМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ГЛУБИННОГО РАЗРЕЗА  $(x, z)$  В КООРДИНАТЫ ВРЕМЕННОГО РАЗРЕЗА  $(s, t)$  ДЛЯ РЯДА ФУНКЦИЙ  $V(z)$  И  $V(x_1, z_1)$**

Используется известное уравнение локального поля времён в параметрической форме при произвольной функции  $V(z)$  [5]:

$$s - x = \int_0^z \frac{mV(z)dz}{\sqrt{1 - m^2V^2(z)}}, \quad (1)$$

$$t = \int_0^z \frac{dz}{V(z)\sqrt{1 - m^2V^2(z)}}, \quad (2)$$

где  $m$  - параметр сейсмического луча:  $m = \sin i_0 / V_0 = \sin i_z / V(z)$ ;  $i_0$  - начальный угол луча с вертикалью в источнике;  $i_z$  - угол между лучом и вертикалью в произвольной точке луча;  $V_0$  - начальная скорость на уровне  $z = 0$ ;  $V(z)$  - функция скорости для вертикально-неоднородной модели среды.

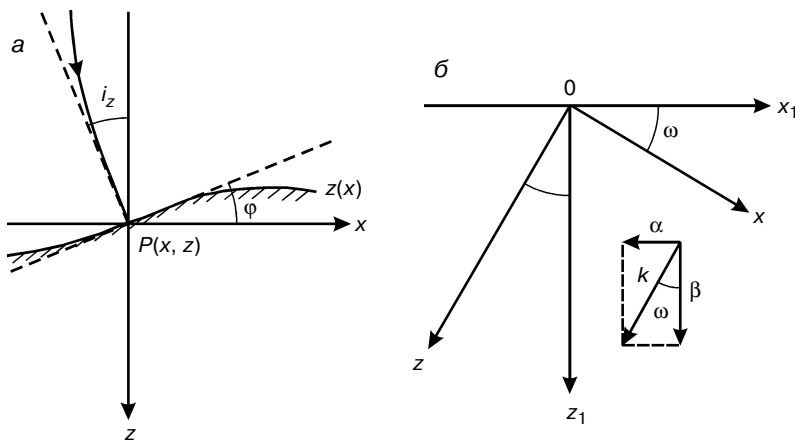
В случае нормальных лучей, когда  $i_z = \varphi$  (рисунок, а), для параметра сейсмического луча справедливо:

$$m = \sin \varphi / V(z).$$

При этом угловой коэффициент касательной к отражающей границе  $z(x)$  в точке  $P(x, z)$  задаётся как  $\operatorname{tg} \varphi = z'(x)$ .

Параметр луча в этом случае запишется как

$$m = \frac{\sin \varphi}{V(z)} = \frac{z'(x)}{V(z)\sqrt{1 + z'^2(x)}}. \quad (3)$$



К определению координат преобразования глубинных и временных кинематических разрезов:

а - схема падения нормального луча на отражающую границу  $z(x)$  в точке  $P(x, z)$ ; б - полный вектор  $k$  градиента скоростей и его горизонтальная и вертикальная компоненты в системе координат  $(x_1, z_1)$  для скоростных функций  $V(x_1, z_1) = V(x_1 + z_1)$

**Модель среды с постоянной скоростью  $V = \text{const}$  в вышележащем слое.** Исходные уравнения (1) и (2) для среды  $V = \text{const}$  записываются в виде

$$s - x = \frac{mV}{\sqrt{1 - m^2V^2}} \int_0^z dz; \quad t = \frac{2z}{V\sqrt{1 - m^2V^2}} \int_0^z dz.$$

После интегрирования имеем

$$s - x = \frac{mVz}{\sqrt{1 - m^2V^2}}, \quad (4)$$

$$t = \frac{2z}{V\sqrt{1 - m^2V^2}}. \quad (5)$$

Подставив в эти уравнения параметры луча в форме (3), получаем окончательные формулы для преобразования глубинного разреза во временной кинематический разрез:

$$s = x + z(x)z'(x), \quad (6)$$

$$t = \frac{2z(x)}{V} \sqrt{1 + z'^2(x)}. \quad (7)$$

**Модель среды с линейным законом изменения скорости с глубиной  $V(z) = V_0(1 + \beta z)$ .** Решение уравнений (1) и (2) для траектории сейсмического луча и времени его распространения в среде с линейной функцией скорости известно:

$$s - x = \int_0^z \frac{mV(z)dz}{\sqrt{1 - m^2V^2(z)}} = \frac{1}{mV_0\beta} \left[ \sqrt{1 - m^2V^2(z)} - \sqrt{1 - m^2V_0^2(1 + \beta z)^2} \right], \quad (8)$$

$$t = z \int_0^z \frac{dz}{V(z)\sqrt{1 - m^2V^2(z)}} = \frac{2}{V_0\beta} \ln \frac{(1 + \beta z) \left( 1 + \sqrt{1 - m^2V_0^2} \right)}{1 + \sqrt{1 - m^2V_0^2(1 + \beta z)^2}}. \quad (9)$$

Из уравнения (3) для параметра луча имеем

$$mV_0 = \frac{z'(x)}{(1 + \beta z)\sqrt{1 + z'^2(x)}},$$

$$mV_0(1 + \beta z) = \frac{z'(x)}{\sqrt{1 + z'^2(x)}}.$$

Подставив эти выражения в (8) и (9), получаем искомые формулы для решения прямой задачи:

$$s = x + \frac{\sqrt{(1+\beta z)^2(1+z'^2(x)) - z'^2(x)} - (1+\beta z)}{\beta z'(x)}, \quad (10)$$

$$t = \frac{z}{\beta V_0} \times \frac{(1+\beta z)\sqrt{1+z'^2(x)} + \sqrt{(1+\beta z)^2(1+z'^2(x)) - z'^2(x)}}{1 + \sqrt{1+z'^2(x)}}. \quad (11)$$

**Модель среды с экспоненциальным законом изменения скорости с глубиной**  $V(z) = V_0 e^{kz}$ . Решение уравнений (1) луча и (2) времени его прохождения с экспоненциальной скоростной функцией также известно [5]:

$$s - x = \int_0^z \frac{mV_0 e^{kz} dz}{\sqrt{1 - m^2 V_0^2 e^{2kz}}} = \frac{1}{k} \left[ \arcsin(mV_0 e^{kz}) - \arcsin(mV_0) \right], \quad (12)$$

$$t = 2 \int_0^z \frac{dz}{V_0 e^{kz} \sqrt{1 - m^2 V_0^2 e^{2kz}}} = \frac{2}{kV_0} \left( \sqrt{1 - m^2 V_0^2} - e^{-kz} \sqrt{1 - m^2 V_0^2 e^{2kz}} \right). \quad (13)$$

Из уравнения (3) для скоростной функции  $V(z) = V_0 e^{kz}$  имеем

$$mV_0 = \frac{z'x}{e^{kz} \sqrt{1+z'^2(x)}},$$

$$mV_0 e^{kz} = \frac{z'(x)}{\sqrt{1+z'^2(x)}}.$$

Подставив эти выражения в (12) и (13), получаем формулы для решения прямой задачи:

$$s = x + \frac{1}{k} \left[ \arcsin \frac{z'(x)}{\sqrt{1+z'^2(x)}} - \arcsin \frac{z'(x)}{e^{kz} \sqrt{1+z'^2(x)}} \right], \quad (14)$$

$$t = \frac{2}{kV_0 e^{kz}} \left[ \sqrt{e^{2kz} - \frac{z'^2(x)}{1+z'^2(x)}} - \sqrt{\frac{1}{1+z'^2(x)}} \right]. \quad (15)$$

**Модель среды с билинейным законом изменения скорости с глубиной**  $V(x, z) = V_0(1 + \alpha x + \beta z)$ . Используя

решение, полученное в старых координатах  $(x, z)$ , для функции  $V(z) = V_0(1 + kz)$ , т. е. (10) и (11):

$$s = x + \frac{\sqrt{(1+kz)^2(1+z'^2(x)) - z'^2(x)} - (1+kz)}{kz'(x)}, \quad (10')$$

$$t = \frac{2}{kV_0} \times \frac{(1+kz)\sqrt{1+z'^2(x)} + \sqrt{(1+kz)^2(1+z'^2(x)) - z'^2(x)}}{1 + \sqrt{1+z'^2(x)}}. \quad (11')$$

Старая система координат  $(x, z)$  связана с новой  $(x_1, z_1)$  через формулы преобразования - поворота координатных осей на угол  $\omega$  (см. рисунок, б):

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \omega - z_1 \sin \omega, \\ z &= x_1 \sin \omega + z_1 \cos \omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Скоростная функция в новых координатах представляется как билинейный закон:

$$V(x_1, z_1) = V_0(1 + \alpha x_1 + \beta z_1). \quad (17)$$

При этом горизонтальная компонента вектора градиента скоростей

$$\frac{dV(x_1, z_1)}{dx_1} = V'_{x_1}(x_1, z_1) = \alpha,$$

вертикальная компонента вектора этого же градиента записывается как

$$\frac{dV(x_1, z_1)}{dz_1} = V'_{z_1}(x_1, z_1) = \beta.$$

Полный вектор градиента скоростей (по направлению  $n$ -нормали к изолиниям  $V(x_1, z_1) = \text{const}$ )

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_1, z_1)}{dn} &= [\text{grad} V(x_1, z_1)] = \\ &= \sqrt{\left[ \frac{dV(x_1, z_1)}{dx_1} \right]^2 + \left[ \frac{dV(x_1, z_1)}{dz_1} \right]^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = k. \end{aligned} \quad (18)$$

Из рисунка, б, кроме того, видно, что

$$\alpha = k \sin \omega, \quad (19)$$

$$\beta = k \cos \omega, \quad (20)$$

$$\omega = \text{arctg} \frac{V'_{x_1}(x_1, z_1)}{V'_{z_1}(x_1, z_1)} = \text{arctg} \frac{\alpha}{\beta}. \quad (21)$$

В соответствии с (19) и (20) функция скорости (17) записывается как

$$V(x_1, z_1) = V_0(1 + kx_1 \sin \omega + kz_1 \cos \omega),$$

а искомые формулы преобразования глубинного разреза во временной кинематический разрез с учётом формул поворота координатных осей (16) принимают вид

$$s = x_1 \cos \omega - z_1 \sin \omega + \quad (22)$$

$$+ \frac{\sqrt{(1 + kx_1 \sin \omega + kz_1 \cos \omega)^2 [1 + D^2] - D^2} - (1 + kx_1 \sin \omega + kz_1 \cos \omega)}{kD},$$

$$t = \frac{2}{kV_0} \times \quad (23)$$

$$\times \ln \frac{(1 + kx_1 \sin \omega + kz_1 \cos \omega) \sqrt{1 + D^2} + \sqrt{(1 + kx_1 \sin \omega + kz_1 \cos \omega)^2 [1 + D^2] - D^2}}{1 + \sqrt{1 + D^2}},$$

где  $D = (\sin \omega + z'_1 \cos \omega)$ .

Модель среды с функцией скорости  $V(x_1, z_1) = V_0 e^{\alpha x_1 + \beta z_1}$ .

Аналогично предыдущей модели, используется решение, полученное в координатах  $(x, z)$  для функции  $V(z) = V_0 e^{kz}$ , т. е. уравнения (14) и (15) и формулы преобразования (16), связывающие координаты  $(x, z)$  старой системы с координатами  $(x_1, z_1)$  новой.

Скоростная функция в новых координатах представляется в виде

$$V(x_1, z_1) = V_0 e^{\alpha x_1 + \beta z_1}.$$

Горизонтальная компонента вектора градиента скоростей

$$\frac{dV(x_1, z_1)}{dx_1} = V'_{x_1}(x_1, z_1) = V_0 \alpha e^{\alpha x_1 + \beta z_1},$$

вертикальная компонента вектора этого же градиента

$$\frac{dV(x_1, z_1)}{dz} = V'_{z_1}(x_1, z_1) = V_0 \beta e^{\alpha x_1 + \beta z_1}.$$

Полный вектор градиента скоростей

$$\frac{dV(x_1, z_1)}{dn} = [\text{grad} V(x_1, z_1)] = \quad (18')$$

$$= \sqrt{\left[ \frac{dV(x_1, z_1)}{dx_1} \right]^2 + \left[ \frac{dV(x_1, z_1)}{dz_1} \right]^2} = V_0 e^{\alpha x_1 + \beta z_1} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = k.$$

$$\text{При этом } \omega = \arctg \frac{V'_{x_1}}{V'_{z_1}} = \arctg \frac{\alpha}{\beta}. \quad (21')$$

В соответствии с (16) функция  $V(z) = V_0 e^{kz}$  может быть записана:

$$V(x_1, z_1) = V_0 e^{k(x_1 \sin \omega + z_1 \cos \omega)}.$$

А формулы для решения прямой задачи имеют вид

$$s = x_1 \cos \omega - z_1 \sin \omega +$$

$$+ \frac{1}{k} \left[ \arcsin \frac{(\sin \omega + z'_1 \cos \omega)}{\sqrt{1 + (\sin \omega + z'_1 \cos \omega)^2}} - \arcsin \frac{\sin \omega + z'_1 \cos \omega}{e^{k(x_1 \sin \omega + z_1 \cos \omega)} \sqrt{1 + (\sin \omega + z'_1 \cos \omega)^2}} \right], \quad (24)$$

$$t = \frac{2}{kV_0 e^{k(x_1 \sin \omega + z_1 \cos \omega)}} \times$$

$$\times \left[ \sqrt{\frac{e^{2k(x_1 \sin \omega + z_1 \cos \omega)} - (\sin \omega + z'_1 \cos \omega)^2}{1 + (\sin \omega + z'_1 \cos \omega)^2}} - \sqrt{\frac{1}{1 + (\sin \omega + z'_1 \cos \omega)^2}} \right]. \quad (25)$$

**Модель среды с заданным распределением пластовых скоростей  $V_{na}(x, z)$ .** Скоростная модель  $V_{пл}(x, z)$  задаётся таблично по данным скоростного анализа сейсмограмм ОГТ (или на основе априорных данных) в вертикальных сечениях разреза  $x_r = \text{const}$ , расположенных с равномерным или неравномерным шагом по профилю. Скачки пластовых скоростей могут совпадать или не совпадать с границами раздела (глубинными границами), которые в общем случае криволинейны.

Для такого класса скоростных моделей среды отсутствуют явные формулы, обеспечивающие решение прямой задачи преобразования глубинных разрезов во временные кинематические (впрочем, как и для решения обратной задачи преобразования). В связи с этим она может решаться только численными методами, в частности, сводится к задаче численного интегрирования системы дифференциальных уравнений луча с начальными условиями Коши в средах с горизонтальной неоднородностью. При этом могут быть использованы различные системы дифференциальных уравнений луча и начальные данные.

В нашей задаче используется система дифференциальных уравнений луча первого порядка в виде, полученном впервые В. А. Елисеевниным [1]:

$$\frac{dx}{d\tau} = V(x, z) \cos \theta,$$

$$\frac{dz}{d\tau} = V(x, z) \sin \theta, \quad (26)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = V'_x(x, z) \sin \theta - V'_z(x, z) \cos \theta.$$

Параметром сейсмического луча является время  $\tau$ . Начальные условия:  $\tau = \tau_0$ ,  $x = x_0$ ,  $z = z_0$ ,  $\theta = \theta_0$ , где  $x_0$ ,  $z_0$  - координаты начальной точки луча на границе раздела;  $\tau_0 = 0$  - начальное время;  $\theta_0$  - начальный угол выхода нормального луча от границы раздела в направлении земной поверхности (линии приведения), определяемый как

$$\theta_0 = -\frac{\pi}{2} + \arctg[z'(x)]. \quad (27)$$

В системе (26) скоростная функция всюду должна быть непрерывна и дифференцируема. В соответствии с этим требованием нами используется формула аппроксимации, предложенная Саттлегером в [8]. По этой формуле таблично заданная модель пластовых скоростей  $V_{пл}(x, z)$  аппроксимируется двумерной скоростной функцией, которая служит и для определения её частных производных:

$$V(x, z) = V_1(x) + \sum_{i=2}^N \frac{V_i(x) - V_{i-1}(x)}{2} \left\{ 1 + \text{th} \left[ k_p (z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} V'_x(x, z) &= V'_1(x) + \\ &+ \sum_{i=2}^N \frac{V'_i(x) - V'_{i-1}(x)}{2} \left\{ 1 + \text{th} \left[ k_p (z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\} - \\ &- k_p \sum_{i=2}^N \frac{V_i(x) - V_{i-1}(x)}{2} h'_{r,i-1}(x) \times \\ &\times \left\{ 1 - \text{th}^2 \left[ k_p (z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V'_z(x, z) &= \\ &= k_p \sum_{i=2}^N \frac{V_i(x) - V_{i-1}(x)}{2} \left\{ 1 - \text{th}^2 \left[ k_p (z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\}, \quad (30) \end{aligned}$$

где  $V_i(x)$  - интерполированные в  $i$ -м пласте значения пластовых скоростей;  $V'_i(x)$  - производная по  $x$  значений пластовых скоростей в  $i$ -м пласте;  $h_{r,i}(x)$  - интерполированные по  $r$  вертикальным сечениям разреза глубины скачков пластовых скоростей;  $k_p$  - коэффициент, характеризующий мощность переходной зоны в окрестности скачков пластовых скоростей;  $x, z$  - текущие координаты;  $N$  - число пластов.

Замена кусочно-постоянной функции пластовых скоростей  $V_{пл}(x, z)$  непрерывной аппроксимирующей функцией  $V(x, z)$  по формуле (28) может осуществляться с различной степенью приближения. Скачки скоростей заменяются при этом градиентными переходными зонами. Необходимая точность аппроксимации обеспе-

чивается за счёт выбора параметра  $k_p$  [6]. Значениям  $k_p \geq 30$  соответствуют сильноградиентные скоростные переходные зоны. При  $k_p > 100$  непрерывная функция (28) практически полностью "вписывается" в заданную модель среды.

#### АЛГОРИТМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ВРЕМЕННОГО РАЗРЕЗА ( $s, t$ ) В КООРДИНАТЫ ГЛУБИННОГО РАЗРЕЗА ( $x, z$ ) ДЛЯ РЯДА ФУНКЦИЙ $V(z)$ И $V(x_1, z_1)$

Явные формулы для решения такой задачи могут быть получены для простейших моделей скорости реальной среды из формул, найденных ранее при решении прямой задачи преобразования. Эти выражения решаются относительно координат  $x$  и  $z$ , причём замена производной по глубинной границе  $z'(x)$  производной по временной линии  $t'_s$  происходит на основе использования закона кажущихся скоростей (закона Бендорфа), записываемого в виде

$$\frac{dt}{ds} = \frac{2 \sin \varphi}{V(z)} \quad \text{или} \quad t'_s = \frac{2z'(x)}{V(z) \sqrt{1 + z'^2(x)}}. \quad (3')$$

Однако здесь воспользуемся более общим подходом к решению обратной задачи преобразования, основанным на предварительном определении уравнения волнового фронта, которое представляет собой семейство кривых с параметром  $s$ :

$$\begin{aligned} F(x, z, t, s) &= 0, \\ \frac{dF(x, z, t, s)}{ds} &= 0, \quad (31) \end{aligned}$$

где  $F(x, z, t, s)$  - уравнение волнового фронта-изохроны с параметром  $s$ .

Систему надо решать относительно искомым координат  $x, z$ . Покажем это на скоростных моделях реальной среды.

**Модель среды с постоянной скоростью  $V = \text{const}$  в вышележащем слое.** Сначала находится уравнение волнового фронта для модели среды  $V = \text{const}$ . Воспользуемся при этом полученными выше выражениями (4) и (5).

Из уравнения (5) следует:

$$m^2 = \frac{t^2 V^2 - 4z^2}{t^2 V^4} \quad \text{и} \quad m = \frac{1}{V^2 t} \sqrt{t^2 V^2 - 4z^2}.$$

Подставив эти выражения в (4), после простых преобразований имеем:

$$4(s - x)^2 = t^2 V^2 - 4z^2.$$

Получаем первое уравнение системы (31) - уравнение волнового фронта:

$$4(s - x)^2 + 4z^2 = t^2 V^2 = F(x, z, t, s).$$

Производная по параметру  $s$  этого выражения даёт нам второе уравнение системы (31):

$$\frac{dF(x, z, t, s)}{ds} = 4(s-x) = t \cdot t'_s \cdot V^2.$$

Система (31) записывается:

$$F(x, z, t, s) = 4(s-x)^2 + 4z^2 = t^2 V^2;$$

$$\frac{dF(x, z, t, s)}{ds} = 4(s-x) = V^2 t \cdot t'_s.$$

Решая её относительно  $x$  и  $z$ , получаем окончательные формулы для преобразования временного кинематического разреза в глубинный для модели среды  $V = \text{const}$ :

$$x = s - \frac{V^2 t t'_s}{4}, \quad (32)$$

$$z = \frac{Vt}{4} \sqrt{4 - V^2 t_s'^2}. \quad (33)$$

**Модель среды с линейным законом изменения скорости с глубиной  $V(z) = V_0(1 + \beta z)$ .** Уравнение волнового фронта - изохроны для модели среды с линейным изменением скорости с глубиной известно [4]. Оно получено из ранее найденных выражений (8) и (9) путём несложных преобразований - исключения параметра луча  $m$ , вытекающего из закона Бендорфа, в виде

$$x^2 + \left[ z - \frac{1}{\beta} \left( \text{ch} V_0 \beta \frac{t}{2} - 1 \right) \right]^2 = \frac{1}{\beta^2} \text{sh}^2 V_0 \beta \frac{t}{2}. \quad (34)$$

Для получения первого уравнения системы (31) выражение (34) после простых преобразований удобно записать:

$$\begin{aligned} F(x, z, t, s) &= (s-x)^2 \beta^2 = \\ &= \frac{1}{2} V_0 t_s' (1 + \beta z) \text{ch} V_0 \beta \frac{t}{2} - (1 - \beta z)^2 - 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Определяя частную производную по  $s$ , имеем из этого выражения второе уравнение системы (31):

$$\frac{dF(x, z, t, s)}{dz} = (s-x)\beta = \frac{1}{2} V_0 t_s' (1 + \beta z) \text{sh} V_0 \beta \frac{t}{2}. \quad (36)$$

Решая систему уравнений из (35) и (36) относительно координат, получаем искомые формулы для преобразования временного разреза в глубинный [3, 7]:

$$x = s - \frac{V_0 t_s'}{\beta} \cdot \frac{\text{sh} V_0 \beta \frac{t}{2} \left( z \text{ch} V_0 \beta \frac{t}{2} + \text{sh} V_0 \beta \frac{t}{2} \sqrt{1 - V_0^2 t_s'^2} \right)}{V_0^2 t_s'^2 \text{sh}^2 V_0 \beta \frac{t}{2} + 4}, \quad (37)$$

$$z = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{4 \text{ch} V_0 \beta \frac{t}{2} + 2 \text{sh} V_0 \beta \frac{t}{2} \sqrt{4 - V_0^2 t_s'^2}}{V_0^2 t_s'^2 \text{sh}^2 V_0 \beta \frac{t}{2} + 4} - 1 \right]. \quad (38)$$

**Модель среды с экспоненциальным законом изменения скорости с глубиной  $V(z) = V_0 e^{kz}$ .** Уравнение изохроны в среде с экспоненциальным изменением скорости с глубиной также известно [4]. Оно, как и в предыдущем случае, получается из ранее найденных выражений (12) и (13) путём исключения параметра луча  $m$ , вытекающего из закона кажущихся скоростей в виде:

$$e^{-kz} (\text{ch} kz - \cos kz) = \frac{1}{2} V_0^2 k^2 \left( \frac{t}{2} \right)^2. \quad (39)$$

Для первого и второго уравнений системы (31) после соответствующих преобразований выражения (39) имеем

$$F(x, z, t, s, k) = \frac{e^{-2kz} + 1}{2} - e^{-kz} \cos k(s-x) = \frac{1}{2} V_0^2 k^2 \left( \frac{t}{2} \right)^2, \quad (40)$$

$$\frac{dF(x, z, t, s)}{ds} = k e^{-kz} \sin k(s-x) = \frac{1}{4} V_0^2 k^2 t \cdot t'_s. \quad (41)$$

Решая эту систему уравнений относительно координат, получаем точные формулы для решения обратной задачи преобразования временного кинематического разреза в глубинный:

$$x = s - \frac{1}{k} \arcsin \frac{V_0^2 k t \cdot t'_s}{4 \sqrt{V_0^2 k^2 \left( \frac{t}{2} \right)^2 + V_0 k \left( \frac{t}{2} \right) \sqrt{4 - V_0^2 t_s'^2} + 1}}, \quad (42)$$

$$z = -\frac{1}{2k} \ln \left[ V_0^2 k^2 \left( \frac{t}{2} \right)^2 + V_0 k \left( \frac{t}{2} \right) \sqrt{4 - V_0^2 t_s'^2} + 1 \right]. \quad (43)$$

**Модель среды с билинейным законом изменения скорости с глубиной  $V(x, z) = V_0(1 + \alpha x_1 + \beta z_1)$ .** Уравнение волнового фронта для функции скорости, аргумент которой является линейной комбинацией координат  $V(x, z) = V_0(\alpha x + \beta z)$ , аналитически получить пока не удаётся. Из литературных данных авторам известно только одно уравнение волнового фронта для функции  $V(x_1, z_1) = V_0(1 + \alpha x_1 + \beta z_1)$ , вывод которого получен, очевидно, с использованием графических построений и рассуждений (13).

В связи с этим воспользуемся имеющимся решением, полученным в старых координатах для скоростной функции  $V(z) = V_0(1 + kz)$ , т. е. уравнениями (37) и (38):

$$\begin{aligned} x &= s - \frac{V_0 t_s'}{k} \times \\ &\times \frac{\text{sh} V_0 k \frac{t}{2} \left( 2 \text{ch} V_0 k \frac{t}{2} + \text{sh} V_0 k \frac{t}{2} \sqrt{4 - V_0^2 t_s'^2} \right)}{V_0^2 t_s'^2 \text{sh}^2 V_0 k \frac{t}{2} + 4}, \end{aligned} \quad (37')$$

$$z = \frac{1}{k} \left[ \frac{4\text{ch}V_0k\frac{t}{2} + 2\text{sh}V_0k\frac{t}{2}\sqrt{4-V_0t_s'^2}}{V_0^2t_s'^2\text{sh}^2V_0k\frac{t}{2} + 4} - 1 \right]. \quad (38')$$

Для сред с переменной скоростью  $V(x, z)$ , зависящей от двух координат  $x$  и  $z$ , скалярное поле скоростей определяется значениями этой скорости в каждой точке среды и графически представляется с помощью линий уровня, на которых скорость принимает значение [2]:

$$V(x, z) = c, \quad (c - \text{const}).$$

Для косоугольной модели среды с функцией  $V(x_1, z_1) = V_0(1 + \alpha x_1 + \beta z_1)$  изолинии скорости в плоскости глубинного разреза (в координатах  $x_1, z_1$  новой системы) представляют собой плоскопараллельные наклонные к горизонту линии  $V(x_1, z_1) = \text{const}$  под углом  $\omega$ , определяемым выражением (21).

В плоскости временного разреза (в координатах  $s_1, t_1$  новой системы) этим линиям скорости будут соответствовать изолинии  $T(s_1, t_1) = \text{const}$  поля времён, которые наклонены к горизонту под тем же углом  $\omega$ .

Преобразование координат старой системы  $(s, t)$  в координаты новой  $(s_1, t_1)$  для решения данной задачи можно осуществить на основе использования формул поворота координатных осей на угол  $\omega$ :

$$\begin{aligned} s &= s_1 \cos \omega + t_1 \sin \omega, \\ t &= -s_1 \sin \omega + t_1 \cos \omega. \end{aligned} \quad (44)$$

В соответствии с этими преобразованиями координат искомые формулы преобразования временного кинематического разреза в глубинный для скоростной функции  $V(x_1, z_1) = V_0(1 + \alpha x_1 + \beta z_1)$  можно записать в виде

$$x_1 = s_1 \cos \omega + t_1 \sin \omega - \quad (45)$$

$$\frac{V_0(t_1' \cos \omega - \sin \omega)}{k} \times \frac{\text{sh}V_0\frac{k}{2}G \left[ 2\text{ch}V_0\frac{k}{2}G + \text{sh}V_0\frac{k}{2}G\sqrt{4-V_0^2(t_1' \cos \omega - \sin \omega)^2} \right]}{V_0^2(t_1' \cos \omega - \sin \omega)^2 \text{sh}^2V_0\frac{k}{2}G + 4},$$

$$z_1 = \frac{1}{k} \times \left[ \frac{4\text{ch}V_0\frac{k}{2}G + 2\text{sh}V_0\frac{k}{2}G\sqrt{4-V_0^2(t_1' \cos \omega - \sin \omega)^2}}{V_0^2(t_1' \cos \omega - \sin \omega)^2 \text{sh}^2V_0\frac{k}{2}G + 4} - 1 \right], \quad (46)$$

где  $G = (t_1 \cos \omega - s_1 \sin \omega)$ ;  $k$  и  $\omega$  определяются из выражений (18) и (21).

**Модель среды с функцией скорости  $V(x_1, z_1) = V_0 e^{\alpha x_1 + \beta z_1}$ .** Уравнение волнового фронта для данной

скоростной функции отсутствует. В связи с этим воспользуемся формулами, полученными для функции  $V(z) = V_0 e^{kz}$ , т. е. уравнениями (42) и (43). Можно легко показать, что в случае косоугольной модели среды с функцией  $V(x_1, z_1) = V_0 e^{\alpha x_1 + \beta z_1}$  изолинии скорости  $V(x_1, z_1) = \text{const}$  в плоскости глубинного разреза будут соответствовать изолинии поля времен  $T(s_1, z_1) = \text{const}$  в плоскости временного разреза.

Аналогично предыдущему варианту преобразований используются формулы (44) для поворота координатных осей на угол  $\omega$ .

В соответствии с такими преобразованиями координат старой системы  $(s, t)$  в координаты новой  $(s_1, t_1)$  искомые выражения для преобразования временного кинематического разреза в глубинный записываются в виде:

$$x_1 = s_1 \cos \omega + t_1 \sin \omega - \quad (47)$$

$$-\frac{1}{k} \arcsin \frac{V_0^2 k G (t_1' \cos \omega - \sin \omega)}{4 \sqrt{\frac{1}{4} V_0^2 k^2 G^2 + \frac{1}{2} V_0 k G \sqrt{4 - V_0^2 (t_1' \cos \omega + \sin \omega)^2} + 1}},$$

$$z_1 = \quad (48)$$

$$= \frac{1}{2k} \ln \left[ \frac{1}{4} V_0^2 k^2 G^2 + \frac{1}{2} V_0 k G \sqrt{4 - V_0^2 (t_1' \cos \omega - \sin \omega)^2} + 1 \right],$$

где  $G = (t_1 \cos \omega - s_1 \sin \omega)$ .

**Модель с заданным распределением скорости в двумерно-неоднородных средах.** В случае, когда скорость в двумерно-неоднородной среде задана, определить неизвестную отражающую границу можно разными способами. Ряд таких способов рассмотрен в работах (Глотов О. К., 1974; Гурьянов В. М., 1965; Коробов Б. И., 1974; Мири-Заде С. А. 1968; Пилипенко В. Н., 1976; и др.). Следует, однако, заметить, что большая часть из них не разработана до практического применения, а часть использует ограниченный класс скоростных моделей среды, показывая при этом только принципиальную возможность решения задачи.

В развитие описанного в [3] алгоритма преобразования кинематических временных разрезов в глубинные нами разработана некоторая его конкретная реализация применительно к моделям среды, используемым в различных условиях, в т. ч. в условиях солянокупольной тектоники. В частности, применяются иные формы задания скоростной функции и организации преломления криволинейных сейсмических лучей на криволинейных границах раздела, в т. ч. на участках, где они не прослеживаются (например, в зонах тектонических нарушений).

Непосредственно используется система дифференциальных уравнений (26) с соответствующими начальными условиями, задающими первую точку луча на земной поверхности (линии приведения). Функция скорости представляется аналитически формулой Саттлера, которая аппроксимирует для всего сейсмичес-

кого разреза задаваемую комбинированную модель, составленную частично интерпретатором и частично по данным скоростного анализа сейсмограмм ОГТ. В этой модели верхняя надсолевая толща (до кровли верхней соленосной толщи) по усмотрению интерпретатора задается как вертикально-неоднородная среда одним из законов скорости:

$$V_1(z) = V_0 + \Delta V(1 - e^{-\alpha z}),$$

где могут быть различными, в т. ч. и такими:  
 $V_0 = 1,7$  км/с,  $\Delta V = 2,85$  км/с,  $\alpha = 0,414$  1/км;

$$V_1(z) = V_0(1 + \beta z)^{1/p}, \quad (49)$$

где  $p = 1, 2, 3, \dots, n, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, n$  - целое;  
 $V_1(z)$  - любой закон.

Для такой комбинированной модели среды на основе использования аппроксимирующей формулы Саттлгера аналитические поля скоростей и градиентов скоростей распространения упругих волн в плоскости разреза с учётом одного из законов скорости в надсолевой толще, описываемых (49), записываются как

$$V(x, z) = V_0 + \Delta V(1 - e^{-\alpha z}) + \sum_{i=2}^N \frac{V_{z,i}(x) - V_{z,i-1}(x)}{2} \left\{ 1 + \text{th} \left[ k_p(z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\}, \quad (50)$$

$$V'_x(x, z) = \sum_{i=2}^N \frac{V'_{z,i} - V'_{z,i-1}(x)}{2} \left\{ 1 + \text{th} \left[ k_p(z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\} - \quad (51)$$

$$-k_p \sum_{i=2}^N \frac{V_{z,i}(x) - V_{z,i-1}(x)}{2} h'_{r,i-1}(x) \left\{ 1 - \text{th}^2 \left[ k_p(z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\},$$

## КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

**Владимир Леонидович ТРОФИМОВ** - руководитель департамента интерпретации ООО "Мегацентр-Плюс", кандидат геол.-минер. наук.

**Фаниль Фаязович ХАЗИЕВ** - ведущий геофизик ООО "Мегацентр-Плюс".

**Дмитрий Игоревич ЧЕРНИКОВ** - аспирант РГГРУ им. Орджоникидзе.

$$V'_z(x, z) = \Delta V \alpha e^{-\alpha z} + k_p \sum_{i=2}^N \frac{V_{z,i}(x) - V_{z,i-1}(x)}{2} \left\{ 1 - \text{th}^2 \left[ k_p(z - h_{r,i-1}(x)) \right] \right\}. \quad (52)$$

Подобные формулы описания двумерных скоростных функций в численном алгоритме преобразования временного разреза в глубинный позволяют расширить класс используемых моделей среды и сделать более адекватной математическую модель процесса распространения возбуждаемых упругих волн в реальной среде при сейсмических исследованиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Елисеевнин В. А.*, 1964, Расчет лучей, распространяющихся в неоднородной среде: Акустический журнал, **X**, **3**.
2. *Облогина Т. И., Пийп В. Б.*, 1966, Исследования кинематических особенностей волн в неоднородных средах: Изв. АН СССР. Физика Земли, **3**.
3. *Облогина Т. И., Пийп В. Б., Юдасин Л. А., Иванов О. П.*, 1972, Метод преобразования временных разрезов в глубинные. М.: ВИНТИ, деп., № 4628-72.
4. *Пузырев Н. Н.*, 1959, Интерпретация данных сейсморазведки методом отраженных волн: М., Гостоптехиздат.
5. *Сейсморазведка. Справочник геофизика*, 1981, под ред. И. И. Гурвича и В. П. Номоканова: М., Недра.
6. *Трофимов В. Л.*, 1976, Аппроксимация разрывно-скоростных функций непрерывными функциями: Материалы III научн. конф. аспирантов и молодых ученых, МГУ, секц. Геофизика: Деп., № 2273-76.
7. *Baranek B., Soukova M.*, 1968, A contribution to the theory of time stction: Geophysicalni sb., **15**.
8. *Sattlerger J. W.*, 1964, Series for three - dimenstional migration in reflctction seismic interpretation: Geophys. Prosp., **12**, **1**.