



Ю. А. Кухаренко
А. М. Сбойчаков
В. А. Гончарук
С. Н. Власов
П. Л. Поляк

ИФЗ РАН, МОСКВА
 ИФЗ РАН, МОСКВА
 МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
 МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
 МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЕ

АННОТАЦИЯ. Проводится вычисление некогерентного рассеяния упругих волн в трещиноватой среде со случайным распределением трещин. С помощью диаграммной техники выполнено усреднение уравнения в перемещениях. Показано, что рассеяние от трещиноватой области со случайным распределением трещин описывается двухчастичной функцией Грина.

ABSTRACT. In this work we calculated incoherent elastic waves scattering in fractured media with arbitrary fracture distribution. Using Feynman diagram technique we have derived averaged microscopic equation of motion. It has shown that the scattering on the fractured area with arbitrary fracture distribution described by two particle Green function.

ВВЕДЕНИЕ. Решение задачи о рассеянии акустического поля на трещинах в пористой среде играет важную роль в задачах акустического контроля разрушения. Особенность предлагаемого метода заключается в возможности исследовать распространение упругой волны, а также рассеяние упругих волн на трещинах. Рассматриваемая нами задача аналогична задаче о реверберации звука в море [4 - 8, 10].

Интегральное ядро $\hat{V}(x, x')$ уравнения (1) выражается через тензор модулей упругости неоднородной среды как

$$\hat{V}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{C}_{ikl}{}_{i'}(x) \frac{\partial}{\partial x_l} \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - t'),$$

где $\hat{C}_{ikl}{}_{i'}(x)$ - тензор модулей упругости, компоненты которого являются случайными функциями координат, что отражает наличие в среде случайным образом расположенных трещин; δ - дельта-функция Дирака.

Отражение волн от регулярных неоднородностей описывается одночастичной усредненной функцией Грина. В случае задачи некогерентного рассеяния от нерегулярных неоднородностей требуется знание двухчастичной функции Грина [1]. Для усреднения уравнения для двухчастичной функции Грина в работе применяется метод диаграммной техники [9].

В результате рассеяния акустических волн на случайных неоднородностях возникает отклик упругой среды. Изучение этого отклика позволяет восстановить статистическую структуру трещиноватой среды, подверженной разрушению. Наибольший интерес для изучения статистической структуры среды представляет информация, содержащаяся в парной корреляционной функции поля деформаций

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССЕЯНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЕ

В работе используется уравнение движения упругой среды в виде:

$$\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}(x) = \int \hat{V}(x, x') \hat{u}(x') dx' + f(x). \quad (1)$$

Здесь $\rho(x)$ - плотность; $\hat{u}(x)$ - перемещения; $f(x)$ - внешняя сила; x обозначает совокупность пространственных координат, поляризации i и времени t , а интегрирование по x' - интегрирование по пространственным координатам, времени t' и суммирование по поляризациям i' .

$$B^u(t, \bar{x}, i; t', \bar{x}', i') = \langle \hat{u}'(t, \bar{x}, i) \hat{u}'(t', \bar{x}', i') \rangle,$$

где $\hat{u}'(t, \bar{x}, i) \equiv \hat{u}(t, \bar{x}, i) - \langle \hat{u}(t, \bar{x}, i) \rangle$ - флуктуация поля смещений [2], а $\langle \dots \rangle$ - обозначает усреднение.

Полная энергия волн, как отражённых от регулярных неоднородностей так и рассеянных на случайных неоднородностях, приходящаяся на единичный интервал частот, пропорциональна величине

$$\begin{aligned} & \langle \hat{u}(\omega, \bar{x}, i) \hat{u}^*(\omega, \bar{x}, i) \rangle = \\ & = \sum_{i_1 i_2} \langle \hat{G}^R(\omega, \bar{x}, i; \bar{x}_0, i_1) \hat{G}^A(\omega, \bar{x}, i; \bar{x}_0, i_2) \rangle f(\omega, \bar{x}_0, i_1) f(\omega, \bar{x}_0, i_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где \hat{G}^A, \hat{G}^R - Фурье-образы соответственно опережающей и запаздывающей функций Грина случайно-неоднородной среды; f - преобразование Фурье квазистационарного источника колебаний, \hat{u}, \hat{u}^* - Фурье-образ функции перемещения и его комплексное сопряжение, x_0 - положение источника f .

Запишем формулу (2) в символическом виде (которым и будем далее пользоваться для удобства):

$$\langle \hat{u}_1 \hat{u}_2 \rangle = G_{12} f_1 f_2, \quad (3)$$

где $G_{12} = \langle \hat{G}_1^R, \hat{G}_2^A \rangle$ - двухчастичная функция Грина для исследуемой среды.

Выделим в (3) регулярную и флуктуационную составляющие:

$$\langle \hat{u}_1 \hat{u}_2 \rangle = \hat{u}_1 \hat{u}_2 + B_{12}^u. \quad (4)$$

Первый член в правой части (4) представляет собой волновое поле, отражённое от регулярных неоднородностей, а второй член описывает рассеяние на нерегулярных неоднородностях:

$$B_{12}^u = \{ G_{12} - G_1^R G_2^A \} f_1 f_2.$$

Таким образом, видно, что отражение волн от регулярных неоднородностей описывается одночастичной усреднённой функцией Грина, тогда как задача рассеяния от нерегулярных неоднородностей требует знания двухчастичной функции Грина. Целью нашего исследования является в общем случае определение корреляционной функции B^u , описывающей корреляцию амплитуд и фаз волн, рассеянных в точках x_1 и x_2 с поляризацией i_1 и i_2 .

Далее с помощью диаграммной техники было проведено усреднение уравнения для двухчастичной функции Грина упругого поля. В результате для последней было получено точное уравнение [3]:

$$G_{12} = G_1^R G_2^A + G_1^R G_2^A \Sigma_{12} G_{12}.$$

Двухчастичный корреляционный оператор Σ суммирует все многократные взаимодействия упругой волны с хаотическими неоднородностями среды, приводящие в результате к боковому рассеянию, т. е. к преобразованию волнового вектора k падающей плоской волны к волновому вектору k' рассеянной волны.

Поскольку рассеяние на хаотических неоднородностях среды (порах, включениях и трещинах) мало (оно на один-два порядка меньше рассеяния упругих волн на регулярных неоднородностях), двухчастичный корреляционный оператор достаточно учесть в парном корреляционном приближении [5, 6, 8].

Выражение для энергии рассеянных волн (считая, что среднее расстояние от изучаемой области до излучателя и приёмника много больше характерных длин волн) можно получить, произведя интегрирование по частоте ω в полосе пропускания приёмника. Если приёмник измеряет рассеянные волны с продольной и поперечной поляри-

зациями по отдельности, это выражение распадается на два члена, формулы имеют громоздкий вид, но физический смысл их прозрачен и проще всего передается диаграммами:

$$\langle \hat{u}_i^R \hat{u}_i^R \rangle = \begin{array}{c} G_1^R \quad G_1^R \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ G_1^A \quad G_1^A \end{array} + \begin{array}{c} G_1^R \quad G_1^R \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ G_1^A \quad G_1^A \end{array} \quad (5)$$

$$\langle \hat{u}_i^R \hat{u}_i^A \rangle = \begin{array}{c} G_1^R \quad G_1^R \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ G_1^A \quad G_1^A \end{array} + \begin{array}{c} G_1^R \quad G_1^R \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ G_1^A \quad G_1^A \end{array} \quad (6)$$

Смысл их в следующем: источник в общем случае излучает как продольные, так и поперечные волны; первая диаграмма в (5) описывает распространение продольных волн и их рассеяние на хаотических неоднородностях; вторая диаграмма в (5) описывает распространение поперечной волны, рассеяние её на неоднородностях с конверсией поперечной волны в продольную и дальнейшее распространение продольной волны к приёмнику. Диаграммы в (6) описывают тот же процесс с перестановкой слов "продольная" и "поперечная" волна.

Полученные в ходе дальнейших преобразований формулы позволяют найти энергию волн, рассеянных в среде с хаотически расположенными в ней трещинами.

Для пустых включений в случае, когда приёмник находится в той же точке, что и излучатель, используя корреляционную функцию Гаусса, получим энергию рассеяния продольных волн в продольные

$$\begin{aligned} B^{ll}(\omega, \vec{x}_0, \vec{x}_0) &= n_\alpha n'_\alpha B_{\alpha\alpha}^{ll}(\omega, \vec{x}_0, \vec{x}_0) = \\ &= (4\pi\rho c_l^2)^{-4} \omega^4 (R_0)^{-4} \exp(-4\alpha(\omega)R_0) V \sigma_\chi^2 \times \\ &\times \left[\lambda^I - \lambda^M + 2(\mu^I - \mu^M) \right]^2 R \left(2 \frac{\omega}{c_l} \vec{n}_0 \right) |f_i(\omega, \vec{x}_0)|^2, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\alpha(\omega)$ - коэффициент поглощения упругой волны, обусловленного рассеянием; R_0 - расстояние до источника; V - объём рассеивающей трещиноватой области; σ_χ^2 - дисперсия распределения трещин; λ и μ - модули упругости матрицы и включений; $R \left(2 \frac{\omega}{c_l} \vec{n}_0 \right)$ - норми-

рованная корреляционная функция; n_0 - направление распространения плоской волны; $f_i(\omega, x_0)$ - амплитуда колебаний источника.

Если рассеяние происходит на включениях, то дисперсия параметра трещиноватости принимает значение

$$\sigma_\chi^2 = v(1-v),$$

где $v = \frac{V^I}{V}$ - пористость, т.е. доля объёма, занятая включениями. Если рассеяние происходит на трещинах, то σ_χ^2 пропорциональна плотности трещин

$$N_c = \frac{3}{4\pi} \frac{\nu}{\alpha},$$

где α - аспектное отношение. Если включения пусты, то $\lambda^I = \mu^I = 0$.

Информация, содержащаяся в парной корреляционной функции, представляется интересной для задач сейсмического изучения систем трещин в породах. По ней могут быть рассчитаны интенсивность рассеяния, характеризующая область трещиноватости, и, кроме того, анизотропия системы трещин.

Корреляционная функция $R\left(2\frac{\omega}{c_l}\bar{n}_0\right)$, например, для гауссовой корреляционной функции имеет вид:

$$R\left(2\frac{\omega}{c_l}\bar{n}_0\right) = \frac{1}{8\pi^{3/2}} r_c^3 \exp\left(-\frac{\omega^2 r_c^2}{2c_l}\right), \quad (8)$$

где r_c - радиус корреляции.

Если длина излучаемой продольной волны $\lambda = \frac{c_l}{\omega} \gg r_c$, то функция (8) равна константе

$$R\left(2\frac{\omega}{c_l}\bar{n}_0\right) = \frac{1}{8\pi^{3/2}} r_c^3. \quad (9)$$

Тогда из (7), например, для пустых включений имеем

$$\begin{aligned} B^{II}(\omega, \bar{x}_0, \bar{x}_0) &= \\ &= \left(\frac{\omega}{c_l} r_c\right)^4 (4\pi r_c^2)^{-4} \frac{\exp(-4\alpha(\omega) \cdot R_0)}{8\pi^{3/2} r_c R_0^4} \times \\ &\times 4V \sigma_x^2 (\lambda^M + 2\mu^M)^2 |f_t(\omega, \bar{x}_0)|^2. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим энергию рассеяния поперечных волн с конверсией их в продольные:

$$\begin{aligned} B^{II}(\omega, \bar{x}_0, \bar{x}_0) &= \frac{\omega^4 r_c^4}{(c_l c_t)^6} \frac{\exp(-4\alpha(\omega) \cdot R_0)}{(4\pi R_0^4) r_c 8\pi^{3/2}} \times \\ &\times 4V \sigma_x^2 (\mu^M)^2 R\left(2\frac{\omega}{c_l} n_0\right) |f_t(\omega, \bar{x}_0)|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, на низких частотах $\omega \ll \frac{c_l}{r_c}$ выполняется, как и следовало ожидать, закон Релея, согласно которому интенсивность рассеяния пропорциональна четвертой степени частоты. Этому предельному условию должна подчиняться любая правильная зависимость интенсивности рассеяния от частоты.

В случае произвольных частот полная зависимость интенсивности рассеяния определяется корреляционной функцией $R\left(2\frac{\omega}{c_l}\bar{n}_0\right)$. Подставляя (8) в (7), видим, что интенсивность рассеяния при малых ω возрастает пропорционально ω^4 , достигает максимума в области $\omega \cong \frac{c_l}{r_c}$ и

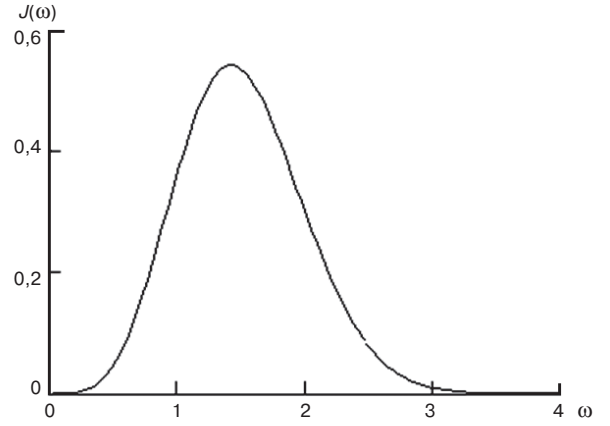


Рис. 1. Зависимость интенсивности рассеяния $J(\omega) = B^{II}(\omega, \bar{x}_0, \bar{x}_0) / |f_t(\omega, \bar{x}_0)|^2$ от частоты излучаемой волны

далее с ростом ω быстро убывает. Зависимость интенсивности рассеяния от частоты представлена на рис. 1.

Анизотропия рассеяния контролируется функцией $R\left(2\frac{\omega}{c_l}\bar{n}_0\right) = R(k)$.

Особый интерес представляет случай параллельной системы, т. е. одинаково ориентированных плоских трещин (тонких дисков). В этом случае, совмещая плоскость трещин с плоскостью (x, y) , а нормаль к ней с осью z , находим

$$R(\bar{k}) = (2\pi^2) R(k_z) \delta(k_x) \delta(k_y).$$

Отсюда видно, что из-за наличия δ -функций интенсивность рассеяния отлична от нуля, только если x - и y -компоненты вектора n_0 равны нулю, т. е. интенсивность рассеяния имеет резкий максимум как функция угла падения, когда вектор n_0 перпендикулярен к плоскости дисков. Такая резкая анизотропия рассеяния представлена на рис. 2.

Совершенно аналогичен анализ энергии рассеяния поперечных волн с конверсией их в продольные. Сделаем одно замечание о быстром убывании обратного рассеяния в области высоких частот, показанном на рис. 2. Мы рассматриваем полностью некогерентный ансамбль неоднородностей, в котором все параметры описываются непрерывной функцией распределения ("непрерывная" модель). В этом случае единственным параметром неоднородности среды является радиус корреляции r_c . При высоких частотах, когда длина волны λ значительно меньше, чем r_c , мы попадаем в область применимости геометрической акустики, в которой боковое рассеяние пренебрежимо мало и отлично от нуля только рассеяние вперед, что и объясняет полученную зависимость $J(\omega)$. Часто рассматривается ансамбль неоднородностей, когерентный по их размерам (например, сферические включения одинакового радиуса), - "дискретная" модель. В этом случае Фурье-образ корреляционной функции $R(k)$ имеет медленно убывающий осциллирующий "хвост", обусловленный наличием резкого скачка модулей упру-

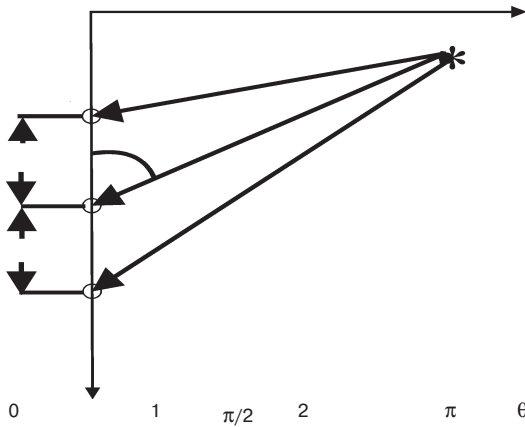


Рис. 2. Зависимость интенсивности рассеяния $J(\theta)$ от угла падения θ волны на систему одинаково ориентированных дисков:

угол θ отсчитывается от плоскости, в которой расположены диски. Функция $J(\theta)$ имеет резкий максимум, когда угол падения θ совпадает с нормалью к поверхности одинаково ориентированных дисков. Ширина максимума определяется разориентировкой дисков, т. е. дисперсией их распределения по ориентациям

гости, ширина которого много меньше λ . Наличие этого хвоста приводит к рассеянию волн с высокими частотами. Если интенсивность этих волн усреднить по размерам включений с непрерывной функцией распределения, то получим быстро убывающий с ростом ω диффузный фон в согласии с непрерывной моделью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. С помощью диаграммной техники получено точное уравнение, описывающее распространение упругой волны в трещиноватой среде. Показано, что массовый (корреляционный) оператор тесно связан с C_{ijkl}^* - тензором эффективных модулей упругости. Показано, что рассеяние упругой волны описывается двухчастичной функцией Грина с двухчастичным корреляционным оператором, который содержит амплитуду рассеяния упругой волны на трещиноватой области. Рассмотрены рассеяние продольной волны в продольную, поперечной в поперечную и конверсия продольных волн в поперечные при рассеянии поперечных волн в продольные. В том случае, когда трещины распределены парал-

лельно некоторому направлению, интенсивность рассеяния существенно зависит от угла падения плоской волны, отсчитанного от направления трещины. Она имеет максимум при угле падения, равном $\pi/2$, и обращается в нуль при углах падения, равных 0. Показано, что в случае, когда длина падающей волны значительно превосходит среднюю длину трещин, интенсивность рассеяния возрастает как ω^4 ; она переходит через максимум и при дальнейшем возрастании частоты экспоненциально убывает.

Эти данные могут быть полезными при определении степени трещиноватости, разрушения, напряжённо-деформированного состояния области изучаемой среды. Предлагаемый метод представляет интерес ввиду того, что позволяет рассчитывать рассеяние упругих волн от трещиноватой среды с произвольно расположенной системой трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич В. Л., Тябликов С. В., 1961, Метод функций Грина в статистической механике: М., Физматгиз.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., 1976, Статистическая физика. Т. 1: М., Наука.
3. Маслов В. П., 1988, Асимптотические методы и теория возмущений: М., Наука.
4. Мороз Т. А., 1973, Корреляционные характеристики морской реверберации от звукорассеивающего слоя: Труды IV Всесоюзной школы-семинара по статистической гидроакустике: Новосибирск, Наука, 84 - 92.
5. Мороз Т. А., 1974, Влияние сильных флуктуаций показателя преломления среды на статистические свойства морской реверберации: Тезисы докладов VII Всесоюзного симпозиума Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей: Л., 159 - 164.
6. Рытов С. М., Крайцов Ю. А., Титарский В. И., 1978, Введение в статистическую радиофизику. Т. II. Случайные поля: М., Наука.
7. Титарский В. И., 1967, Распространение волн в турбулентной атмосфере: М., Наука.
8. Финкельберг В. М., 1967, Распространение волн в случайной среде. Метод корреляционных функций: Журнал экспериментальной и теоретической физики, **53**, 1 (7), 401 - 416.
9. Фейнман Р., Хибс А., 1968, Квантовая механика и интегралы по траекториям: М., Мир.
10. Frish U., 1968, Wave propagation in random media. Probability methods in applied mathematics, vol. 1 (A.T. Bharucha-Reid, ed.): Academic, New York, 75 - 198.

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Юрий Александрович КУХАРЕНКО - ведущий научный сотрудник Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта, РАН, кандидат физ.-мат. наук.

Алексей Максимович СБОЙЧАКОВ - младший научный сотрудник Института физики Земли им. О. Ю. Шмидта, РАН.

Вячеслав Анатольевич ГОНЧАРУК - аспирант, МГУ им. М. В. Ломоносова.

Сергей Николаевич ВЛАСОВ - выпускник механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Пётр Леонидович ПОЛЯК - выпускник механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.